गणित भाग –II

दसवीं कक्षा

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार गठित की गई समन्वय समिति के दिनांक २९.१२.२०१७ की बैठक में इस पाठ्यपुस्तक को वर्ष २०१८-१९ शैक्षणिक वर्ष से निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई !

गणित

भाग II

दसवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे - ४११ ००४.

PEVFI8

आपके स्मार्टफोन में 'DIKSHA App' द्वारा, पुस्तक के प्रथम पृष्ठ पर Q.R.Code के माध्यम से डिजिटल पाठ्यपुस्तक एवं प्रत्येक पाठ में अंतर्निहित Q.R.Code में अध्ययन अध्यापन के लिए पाठ से संबंधित उपयुक्त दृक-श्राव्य सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी ।

प्रथमावृत्ति : 2018 © महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल
पहला पुनर्मुद्रण : 2019 पुणे - ४११ ००४.

मुख्य समन्वयक श्रीमती प्राची रविंद्र साठे

गणित विषयतज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती जयश्री पुरंदरे	श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. राजेंद्र चौधरी	श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. रामा व्हन्याळकर	डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्री. आण्णापा परीट	श्री. वसंत शेवाळे
श्री. अन्सार शेख	श्री. प्रताप काशिद
श्री. श्रीपाद देशपांडे	श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. सुरेश दाते	श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. उमेश रेळे	श्री. गणेश कोलते
श्री. बन्सी हावळे	श्री. संदेश सोनावणे
श्रीमती रोहिणी शिर्के	श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश झेंडे	श्री. प्रकाश कापसे
श्री. लक्ष्मण दावणकर	श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी	श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव	श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद	श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे	श्रीमती आर्या भिडे

मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन
श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

अक्षरांकन
डी.टी.पी. विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे

अनुवादक : श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. सुनील श्रीवास्तव
श्रीमती. मुकुल बापट
समीक्षण : श्री. धीरज शर्मा
श्री. लीलाराम बोपचे
विषयतज्ञ : श्री. प्रेमवल्लभ ओझा

प्रमुख संयोजक
उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे.

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहायक निर्मिती अधिकारी
कागद : ७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह
मुद्रणादेश : N/PB/2019-20/20,000
मुद्रक : ANAND PUBLICATIONS, JALGAON

प्रकाशक
विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडल
प्रभादेवी, मुंबई २५

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**
विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**
प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,
तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता
और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रों,

दसवीं कक्षा में आप सभी का स्वागत ।

इस वर्ष आप गणित भाग I और भाग II पुस्तक का अध्ययन करनेवाले हैं ।

गणित भाग II में भूमिति, त्रिकोणमिति, निर्देशांक भूमिति तथा महत्वमापन यह प्रमुख क्षेत्र हैं । इस वर्ष आपको नौवीं कक्षा तक परिचय किए गये घटकों का थोड़ा अधिक अध्ययन करना है । उनका व्यवहार में होनेवाला उपयोग उदाहरण से स्पष्ट होगा । जहाँ नवीन भाग, सूत्र अथवा उपयोजन है वहाँ सरल स्पष्टीकरण दिया गया है । नमूना के लिए प्रत्येक प्रकरण में हल किए गये उदाहरण, अभ्यास के लिए उदाहरण, इसके अलावा प्रज्ञावान विद्यार्थियों के लिए कुछ चुनौतीपूर्ण प्रश्न को तारांकित किया गया है । दसवी के पश्चात कुछ विद्यार्थियों को गणित का अध्ययन करना न हो, तो भी गणित की मूलभूत संकल्पनाएँ उन्हें समझ में आए, उसी प्रकार अन्य क्षेत्रो में काम करते समय आवश्यकतानुसार गणित का उपयोग करना आना चाहिए, ऐसा ज्ञान उन्हें इस पुस्तक में प्राप्त होगा । अधिक जानकारी हेतू इस शीर्षक के अंतर्गत दी गई जानकारी, जिस विद्यार्थियों को दसवीं के पश्चात गणित का अध्ययन करके उसमें प्राविण्य प्राप्त करने की इच्छा हो, उनके लिए यह उपयोगी सिद्‌ध होगा इसलिए ऐसे विद्यार्थियों को इस पुस्तक को अवश्य पढ़ना होगा । पूरी किताब को एक बार पढ़कर अवश्य समझें ।

प्रत्येक प्रकरण से संबंधित अधिक उपयुक्त दृक श्रव्य साहित्य, ॲप के माध्यम से, क्यू. आर. कोड द्‌वारा आपको उपलब्ध होगी, अध्ययन के लिए इसका उपयोग निश्चित रूप से होगा !

कक्षा दसवीं की परीक्षा बहुत महत्वपूर्ण मानी जाती है । इस का तनाव न लेते हुए सही अध्ययन करके मन माफिक सफलता प्राप्त करने के लिए आप सभी को शुभकामनाएँ !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे.

पुणे
दिनांक : १८ मार्च २०१८, गुढीपाडवा
भारतीय सौर दिनांक : २७ फाल्गुन १९३९

कक्षा १० वीं गणित भाग II अभ्यासक्रम से विद्‌यार्थियों में निम्नलिखित क्षमता विकसित होगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता कथन
1. **भूमिति**	1.1 समरूप त्रिभुज 1.2 वृत्त	• समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म, सर्वांगसम त्रिभुजों के गुणधर्म तथा पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग करके प्रश्नों का हल कर सकना । • समरूप त्रिभुजों की रचना कर सकना । • वृत्त की जीवा एवं स्पर्शरेखा के गुणधर्म का उपयोग कर सकना । • वृत्त की स्पर्शरेखा की रचना कर सकना ।
2. **निर्देशांक भूमिती**	2.1 निर्देशांक भूमिति	• दो बिंदुओं के बीच अंतर ज्ञात कर सकना । • रेखाखंड के विभाजन बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कर सकना । • रेखा का ढाल ज्ञात कर सकना ।
3. **महत्वमापन**	3.1 पृष्ठफल और घनफल	• वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कर सकना । • द्‌वैत्रिज्य एवं वृत्तखंड के क्षेत्रफल ज्ञात कर सकना । • दिए गए त्रिमितीय आकारों के पृष्ठफल एवं घनफल ज्ञात कर सकना ।
4. **त्रिकोणमिति**	4.1 त्रिकोणमिति	• त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का उपयोग कर प्रश्नों को हल कर सकना । • पेड़ों की ऊँचाई ज्ञात करना, नदी के पाट की चौड़ाई ज्ञात कर सकना इस तरह की समस्याओं के लिए त्रिकोणमिति का उपयोग कर सकना ।

शिक्षकों के लिए सूचना

सर्वप्रथम पुस्तक का गहन अध्ययन कर इसे समझ लीजिए । विभिन्न घटकों का स्पष्टीकरण करना एवं सूत्रों की जाँच करके देखना इन महत्वपूर्ण बातों के लिए कृतियों की सहायता लीजिए ।

प्रयोगों द्‌वारा भी मूल्यमापन करना है । इसके लिए भी कृति का उपयोग होता है । विद्‌यार्थियों को स्वतंत्र विचार करने के लिए प्रोत्साहन दीजिए । किसी प्रश्न को भिन्न किंतु तर्कसंगत विधि से हल करनेवाले विद्‌यार्थियों को खास तरह की शाबासी दीजिए ।

भूमिति में प्रयोगों के कथन ध्यान में रखकर उनका उपयोग करके प्रश्नों को हल करने की कुशलता विकसित करने के लिए पुस्तक में दी गई कृतियों के अतिरिक्त कुछ और कृतियाँ की जा सकती हैं ।

प्रयोगों की सूची

(1) पुठ्ठे का एक त्रिभुजाकार टुकड़ा काट लीजिए । टेबल पर मोमबत्ती अथवा छोटा दीया लगाइए । त्रिभुज को दीवार तथा दीया या मोमबत्ती के बीच पकड़िए उसकी परछाईं का निरीक्षण कीजिए । निश्चित कीजिए कि परछाईं तथा मूल त्रिभुज समरूप हैं क्या ? (मूल त्रिभुज तथा उसकी परछाईं परस्पर समरूप होने के लिए कौन-सी सावधानी बरतेंगे?)

(2) समान माप वाले दो समकोण त्रिभुज काट लीजिए । त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं को दोनो ओर से A, B, C ऐसे नाम दीजिए । उसमें से एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर शीर्षलंब खींचिए । लंबपाद को 'D' नाम दीजिए । एक त्रिभुज को लंब से काटकर दो समकोण त्रिभुज प्राप्त कीजिए । तीनों समकोण त्रिभुज कौन-सी एकैकी संगति के अनुसार समरूप हैं लिखिए ।

(3) किसी एक वृत्त की रचना कीजिए । उसके अंतःभाग में, बाह्यभाग में तथा वृत्त पर प्रत्येक ऐसे तीन बिंदु लीजिए । इस प्रत्येक बिंदु से वृत्त पर कितनी स्पर्शरेखाएँ खींची जा सकती हैं इसकी सारिणी तैयार कीजिए । सारिणी में कच्ची आकृतियाँ खींच कर दर्शाइए ।

(4) 'दो बिंदु से असंख्य वृत्त खींचे जा सकते हैं' यह दर्शाने के लिए, दिए गये बिंदु से कम से कम पाँच वृत्त खींचिए ।

(5) वृत्तों के गुणधर्म जाँच करने के लिए उपयोगी हों ऐसे कील लगे हुए जिओबोर्ड लीजिए । रबरबैंड की सहायता से निम्नलिखित में से किसी एक प्रमेय के लिए जिओबोर्ड पर आकृति तैयार कीजिए ।
(i) अंतर्लिखित कोण का प्रमेय (ii) स्पर्शरेखा-छेदन रेखा कोण का प्रमेय
(iii) विपरीत वृत्तखंड के कोण का प्रमेय

(6) एक वृत्त तथा एक कोण की प्रतिकृति लेकर विभिन्न स्थितियों से वृत्तखंड चाप तैयार कीजिए ।

(7) कंपास तथा पट्टी की सहायता से किसी कोण के चार समान भाग करना ।

(8) एक बीकर लेकर उसकी ऊँचाई तथा आधार की त्रिज्या नापिए । इस आधार पर उसमें कितना पानी समाएगा उसे सूत्र की सहायता से ज्ञात कीजिए । उसे पानी से भरकर उसके आकारमान को मापनपात्र की सहायता से मापिए । दोनों ही उत्तर से निष्कर्ष ज्ञात कीजिए ।

(9) शंकुछेद के आकार का एक कागज का प्याला लीजिए । उसके आधार की तथा ऊपरी वृत्त की त्रिज्या नापिए । प्याले की ऊँचाई नापिए । उस प्याले में कितना पानी समाएगा, उसे सूत्र से ज्ञात कीजिए । उसे पानी से पूरा भरकर उस पानी के आकारमान को मापिए । पानी के आकारमान तथा सूत्र से ज्ञात किए गए घनफल की तुलना सूत्र की सहायता से कीजिए ।

(10) मोटे पुठ्ठे के दो समरूप त्रिभुज काट लें । उनके क्षेत्रफलों का अनुपात (i) उसकी परिमिति के वर्ग के अनुपात में है क्या ? अथवा (ii) उसके माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपात में है क्या ? यह प्रत्यक्ष मापन से निश्चित कीजिए ।

अनुक्रमणिका

1 समरूपता

आओ सीखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात
- समानुपात का मूलभूत प्रमेय
- समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम
- त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का गुणधर्म
- तीन समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा द्वारा बने अंत:खंडों का गुणधर्म
- त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी
- समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का गुणधर्म

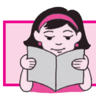
थोड़ा याद करें

हमने अनुपात तथा समानुपात का अध्ययन किया है । a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $\frac{m}{n}$ है, इस कथन को a और b दोनों संख्याएँ $m{:}n$ के अनुपात में हैं, ऐसा भी लिखा जाता है ।

इस संकल्पना के लिए हम सामान्यत: धनात्मक वास्तविक संख्या का विचार करते हैं । हमें यह ज्ञात है कि रेखाखंडों की लंबाई और किसी आकृति का क्षेत्रफल धनात्मक वास्तविक संख्या होती है ।

हमें त्रिभुजों के क्षेत्रफल के सूत्र की जानकारी है ।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई



आओ जानें

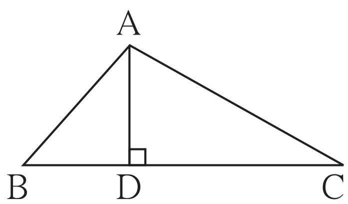
दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात (Ratio of areas of two triangles)

किन्हीं दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करेंगे ।

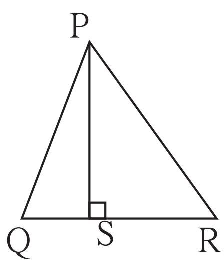
उदाहरण Δ ABC का आधार BC तथा ऊँचाई AD है ।

Δ PQR का आधार QR तथा ऊँचाई PS है ।

$$\frac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



आकृति 1.1



आकृति 1.2

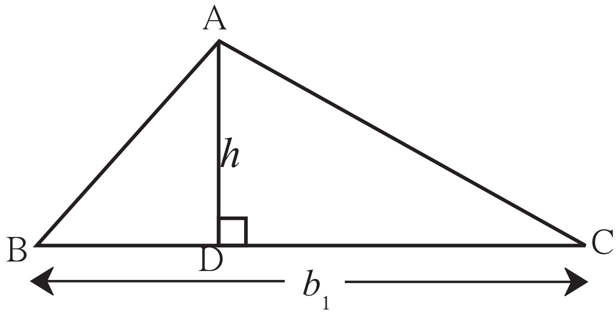
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

इस आधारपर दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके आधारों और संगत ऊँचाइयों के गुणनफलों के अनुपात के बराबर होता है ।

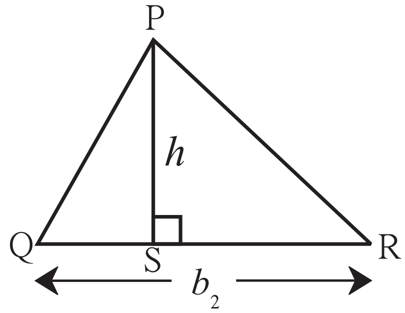
यदि एक त्रिभुज का आधार b_1 तथा ऊँचाई h_1 और दूसरे त्रिभुज का आधार b_2 तथा ऊँचाई h_2 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात = $\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

इन दो त्रिभुजों के संबंध में कुछ शर्ते रखकर देखिये ।

शर्त 1 : दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान होनेपर



आकृति 1.3



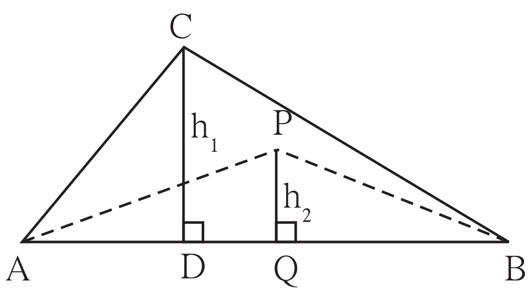
आकृति 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

गुणधर्म : समान ऊँचाई वाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है ।

शर्त 2 : दोनों त्रिभुजों के आधार समान होनेपर –



आकृति 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

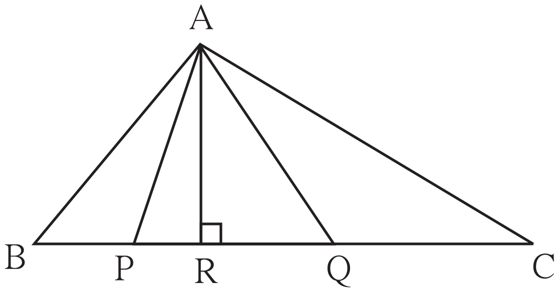
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

गुणधर्म : समान आधारवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है ।

कृति :

नीचे दी गई रिक्त चौखटें भरिए ।

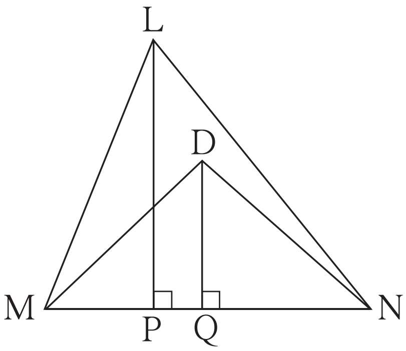
(i)



आकृति 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



आकृति 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

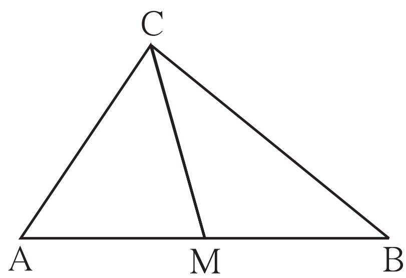
(iii) बिंदु M यह रेख AB का मध्य बिंदु है ।

रेख CM यह Δ ABC की माध्यिका है ।

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \frac{\square}{\square} = \square$$

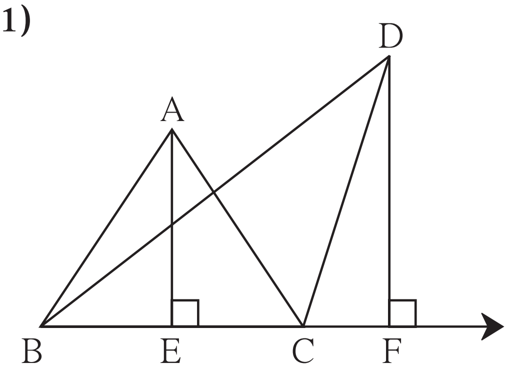
कारण लिखिए ।



आकृति 1.8

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1)



आकृति 1.9

संलग्न आकृति में,

रेख AE $\perp$ रेखा BC, रेख DF $\perp$ रेखा BC

AE = 4, DF = 6 तो $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

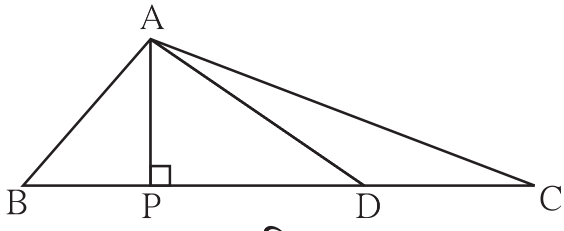
हल : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \dfrac{AE}{DF}$ .... समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाई के अनुपात के बराबर होता है ।

$$= \frac{4}{6} \qquad = \frac{2}{3}$$

उदा. (2) Δ ABC में भुजा BC पर बिंदु D इस प्रकार है कि DC = 6, BC = 15

A(Δ ABD) : A(Δ ABC) और A(Δ ABD) : A(Δ ADC) का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : बिंदु A यह Δ ABD, Δ ADC तथा Δ ABC का सामान्य शीर्षबिंदु है । इन तीनों त्रिभुजों का आधार एक ही रेखा पर है अर्थात तीनों त्रिभुजों की ऊँचाई समान है ।



आकृति 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

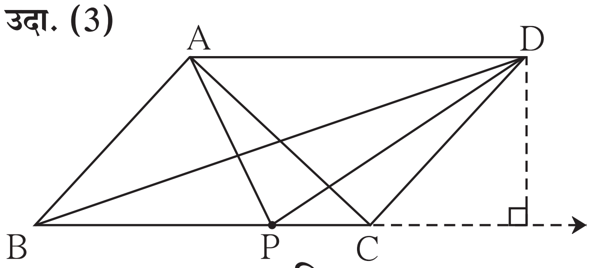
$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$ .... ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में

$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$ .... ऊँचाई समान है इसलिए क्षेत्रफल आधार के अनुपात में

$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

उदा. (3)



आकृति 1.11

$\square$ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है । भुजा BC पर कोई बिंदु P स्थित है, तो समान क्षेत्रफलवाले त्रिभुजों की दो जोड़ियाँ बनाइए ।

हल : $\square$ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

$\therefore$ AD || BC तथा AB || DC

Δ ABC तथा Δ BDC पर विचार कीजिए ।

यह त्रिभुज दो समांतर रेखाओं के मध्य खींचे गए हैं । इसलिए समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ही इन दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई होगी ।

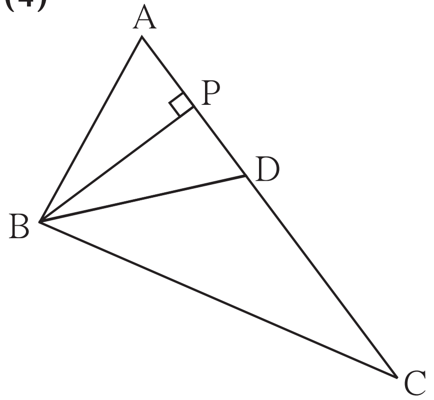
Δ ABC तथा Δ BDC में आधार BC समान है तथा ऊँचाई भी समान है ।

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC तथा Δ ABD में आधार AB समान है तथा ऊँचाई भी समान है ।

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

उदा. (4)



आकृति 1.12

संलग्न आकृति में Δ ABC की भुजा AC पर बिंदु D इस प्रकार है कि AC = 16, DC = 9, BP $\perp$ AC, तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\dfrac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ ABC)}$ (ii) $\dfrac{A(\Delta\ BDC)}{A(\Delta\ ABC)}$

(iii) $\dfrac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ BDC)}$

हल : Δ ABC में भुजा AC पर बिंदु P तथा बिंदु D हैं । इसलिए Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB का सामान्य शीर्षबिंदु B पर विचार करें तो उनकी AD, DC, AC, AP आदि भुजाएँ एक ही रेखा पर स्थित हैं । इन सभी त्रिभुजों की ऊँचाई समान है । इसलिए इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके आधारों के अनुपात में है ।

AC = 16, DC = 9,

$\therefore$ AD = 16 - 9 = 7

$\therefore \dfrac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ ABC)} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{7}{16}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\dfrac{A(\Delta\ BDC)}{A(\Delta\ ABC)} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{9}{16}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

$\dfrac{A(\Delta\ ABD)}{A(\Delta\ BDC)} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{7}{9}$ . . . . (समान ऊँचाईवाले त्रिभुज)

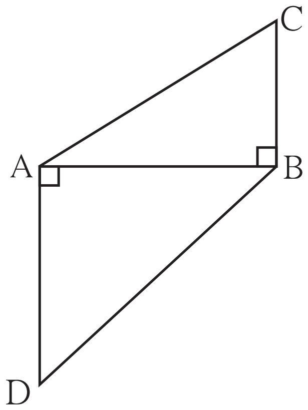
इसे ध्यान में रखें

- दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उन त्रिभुजों के संगत आधार तथा संगत ऊँचाइयों के गुणनफल के अनुपात के बराबर होता है ।
- समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होता है ।
- समान आधारवाले त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के अनुपात के बराबर होता है ।

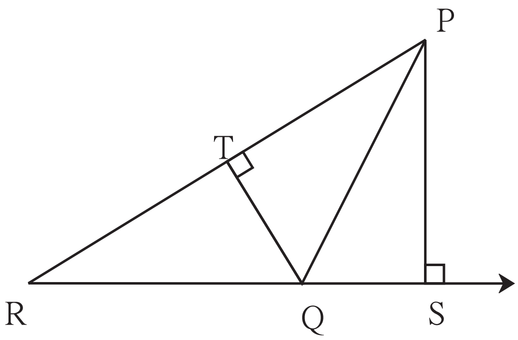
प्रश्नसंग्रह 1.1

1. यदि किसी त्रिभुज का आधार 9 और ऊँचाई 5 है । दूसरे त्रिभुज का आधार 10 और ऊँचाई 6 हो तो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

2. संलग्न आकृति 1.13 में $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, $BC = 4$, $AD = 8$ तो $\dfrac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ ADB)}$ का मान ज्ञात कीजिए ।



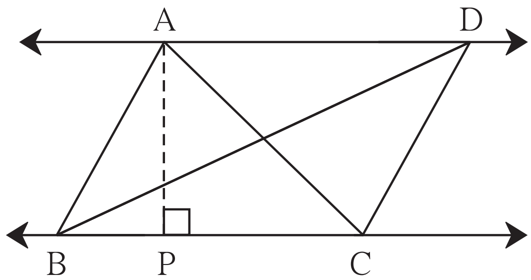
आकृति 1.13



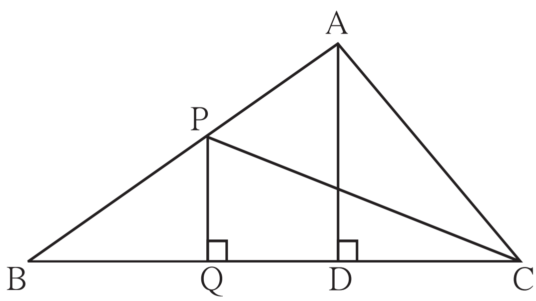
आकृति 1.14

3. संलग्न आकृति 1.14 में रेख $PS \perp$ रेख RQ रेख $QT \perp$ रेख PR । यदि $RQ = 6$, $PS = 6$, $PR = 12$, तो QT का मान ज्ञात कीजिए ।

4. संलग्न आकृति 1.15 में $AP \perp BC$, $AD \parallel BC$, तो $A(\Delta\ ABC) : A(\Delta\ BCD)$ का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.15



आकृति 1.16

5. संलग्न आकृति 1.16 में, $PQ \perp BC$, $AD \perp BC$ तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) $\dfrac{A(\Delta\ PQB)}{A(\Delta\ PBC)}$ (ii) $\dfrac{A(\Delta\ PBC)}{A(\Delta\ ABC)}$

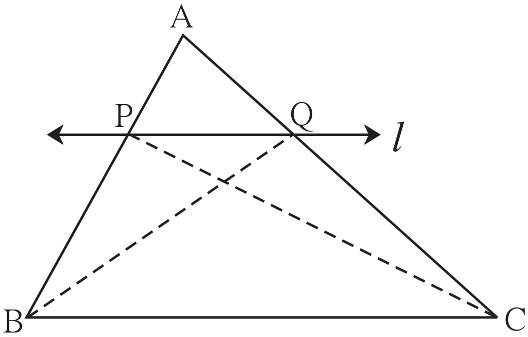
(iii) $\dfrac{A(\Delta\ ABC)}{A(\Delta\ ADC)}$ (iv) $\dfrac{A(\Delta\ ADC)}{A(\Delta\ PQC)}$

आओ जानें

समानुपात का मूलभूत प्रमेय (Basic Proportionality Theorem)

प्रमेय : **यदि किसी त्रिभुज की किसी एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा उसकी अन्य दो भुजाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करे तो वह रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।**

दत्त : Δ ABC में रेखा $l \parallel$ भुजा BC और रेखा l यह भुजा AB को बिंदु P पर तथा भुजा AC को बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करती है।



आकृति 1.17

साध्य : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

रचना : रेख PC तथा रेख BQ खींचिए।

उपपत्ति : Δ APQ तथा Δ PQB समान ऊँचाई वाले त्रिभुज हैं।

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{AP}{PB}$ .... (आधार के अनुपात में क्षेत्रफल) ..... (I)

इसी प्रकार $\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... (आधार के अनुपात में क्षेत्रफल) ..... (II)

Δ PQB तथा Δ PQC में रेख PQ सामान्य आधार है। रेख PQ $\parallel$ रेख BC

इसलिए Δ PQB तथा Δ PQC की ऊँचाई समान है।

$A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) तथा (III)] से

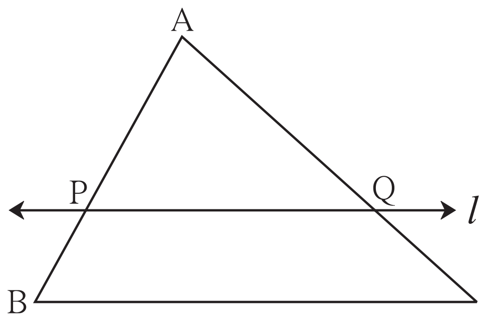
$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... [(I) तथा (II)] से

समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम (converse of B.P.T.)

प्रमेय : **यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा उस त्रिभुज की तीसरी भुजा के समांतर होती है।**

आकृति 1.18 में रेखा l यह Δ ABC की भुजा AB और भुजा AC को क्रमशः बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करती है। और $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ तो रेखा $l \parallel$ रेख BC

इस प्रमेय की उपपत्ति अप्रत्यक्ष पद्धति से दे सकते हैं ।



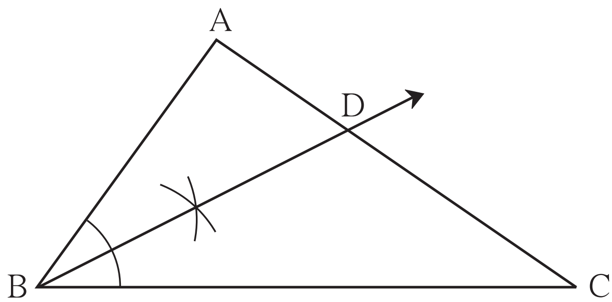
आकृति 1.18

कृति :

- किसी एक Δ ABC की रचना कीजिए ।
- त्रिभुज के $\angle$ B को समद्विभाजित कीजिए । वह AC को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उसे D नाम दीजिए ।
- भुजा नापकर लिखिए ।

  AB = $\boxed{}$ सेमी BC = $\boxed{}$ सेमी

  AD = $\boxed{}$ सेमी DC = $\boxed{}$ सेमी
- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{AD}{DC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए ।
- दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं, यह समझ में आता है ।
- त्रिभुज के अन्य कोणों को समद्विभाजित कीजिए तथा उपर्युक्त विधि से अनुपात ज्ञात कीजिए । यह अनुपात भी समान आते हैं इसे समझिए ।



आकृति 1.19

आओ जानें

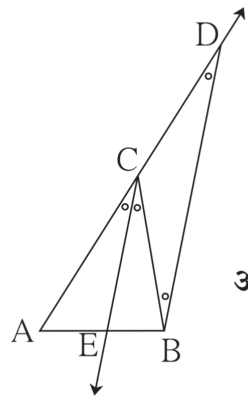
त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय (Theorem of angle bisector of a triangle)

प्रमेय : **किसी त्रिभुज में कोण का समद्विभाजक, कोण की सम्मुख भुजा को अन्य भुजाओं की लंबाइयों के अनुपात में विभाजित करता है ।**

दत्त : Δ ABC में $\angle$ C का समद्विभाजक रेख AB को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है ।

साध्य : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

रचना : बिंदु B से, किरण CE के समांतर एक रेखा खींचिए जो किरण AC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती हो ।



आकृति 1.20

उपपत्ति : किरण CE || किरण BD और रेख AD तिर्यक रेखा है ।

$\therefore \angle ACE = \angle CDB$ .... (संगत कोण) ...(I)

अब BC को तिर्यक रेखा मानकर

$\angle ECB = \angle CBD$ .... (एकांतर कोण) ...(II)

परंतु $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (दत्त) ...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [कथन (I), (II) तथा (III) से]

Δ CBD में, भुजा CB $\cong$ भुजा CD .... (सर्वांगसम कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

अब, Δ ABD में रेख EC || भुजा BD .... (रचना)

$\therefore \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AC}{CD}$ .... (समानुपात का मूलभूत प्रमेय) ...(V)

$\therefore \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AC}{CB}$ .... [कथन (IV) तथा (V) से]

अधिक जानकारी हेतू :

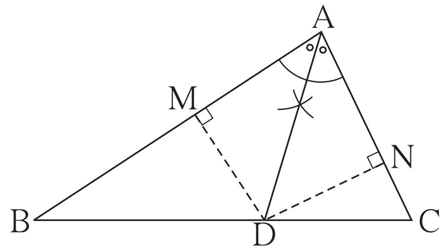
उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति दूसरे प्रकार से स्वयं लिखिए ।

इसके लिए आकृति 1.21 में दर्शाए अनुसार Δ ABC की रचना कीजिए और DM $\perp$ AB तथा DN $\perp$ AC खींचिए ।

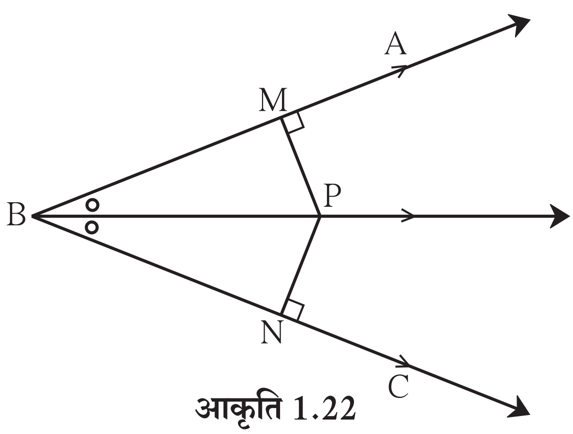
(1) समान ऊँचाई वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके संगत आधारों के अनुपात के बराबर होते हैं इसका उपयोग कीजिए ।

और

(2) कोण के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु कोण के भुजाओं से समदूरस्थ होता है । इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए ।



आकृति 1.21



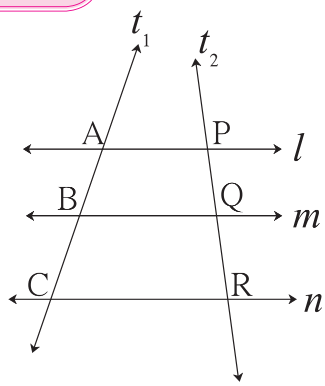
आकृति 1.22

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के प्रमेय का विलोम (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC में बिंदु D भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, तो किरण AD यह $\angle$ BAC की समद्विभाजक होती है ।

तीन समांतर रेखाएँ तथा उनकी तिर्यक रेखा का गुणधर्म
(Property of three parallel lines and their transversal)

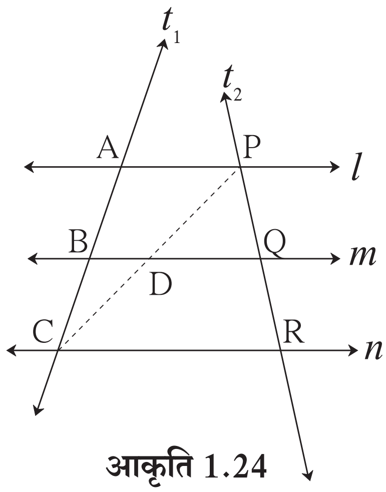
कृति :



आकृति 1.23

- तीन समांतर रेखाएँ खींचिए ।
- उन्हे l, m, n नाम दीजिए ।
- t_1 तथा t_2 दो तिर्यक रेखाएँ खींचिए ।
- तिर्यक रेखा t_1 पर AB तथा BC अंत:खंड हैं ।
- तिर्यक रेखा t_2 पर PQ तथा QR अंत:खंड हैं ।
- $\frac{AB}{BC}$ तथा $\frac{PQ}{QR}$ के अनुपात ज्ञात कीजिए । यह दोनों अनुपात लगभग समान होते हैं । इसे समझिए ।

प्रमेय : किसी तिर्यक रेखा द्वारा किन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंत:खंण्डों का अनुपात किसी अन्य तिर्यक रेखा द्वारा उन्हीं तीन समांतर रेखाओं पर निर्मित अंत:खण्डों के अनुपात के बराबर होता है ।



आकृति 1.24

दत्त : रेखा l || रेखा m || रेखा n
t_1 तथा t_2 उनकी तिर्यक रेखाएँ है । तिर्यक रेखा t_1 यह इन रेखाओं को क्रमश: बिंदु A, B तथा C पर प्रतिच्छेदित करती है । तिर्यक रेखा t_2 यह इन रेखाओं को क्रमश: बिंदु P, Q, तथा R पर प्रतिच्छेदित करती है ।

साध्य : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

उपपत्ति : रेख PC खींचो । यह रेखाखंड रेखा m को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है ।

Δ ACP में, BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

Δ CPR मे DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) तथा (II) से $\qquad \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

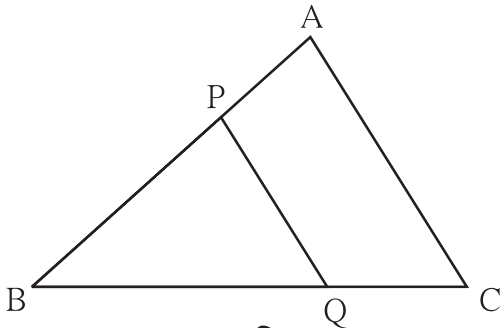
इसे ध्यान में रखें

(1) समानुपात का मूलभूत प्रमेय

Δ ABC में यदि B-P-A; B-Q-C

रेख PQ || रेख AC हो

तो $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$



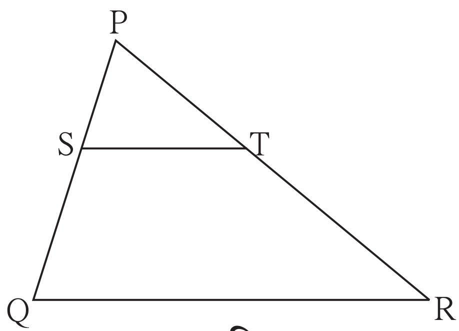
आकृति 1.25

(2) समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम

Δ PQR में यदि P-S-Q; P-T-R

तथा $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

तो रेख ST || रेख QR.

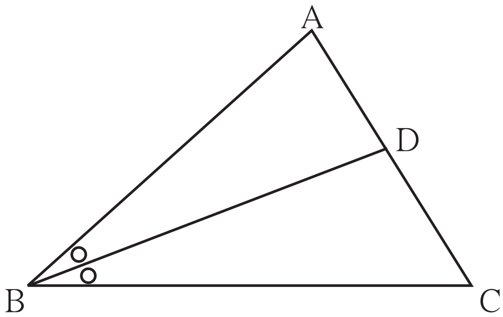


आकृति 1.26

(3) त्रिभुज के कोण समद्विभाजक का प्रमेय

यदि Δ ABC में रेख BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक हो और A-D-C हो,

तो $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

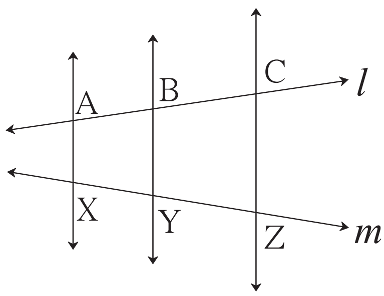


आकृति 1.27

(4) तीन समांतर रेखाओं तथा उनकी तिर्यक रेखा का गुणधर्म

यदि रेखा AX || रेखा BY || रेखा CZ और तिर्यक रेखाएँ l तथा m क्रमश: A,B,C तथा X,Y,Z में प्रतिच्छेदित करती हो, तो

$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$



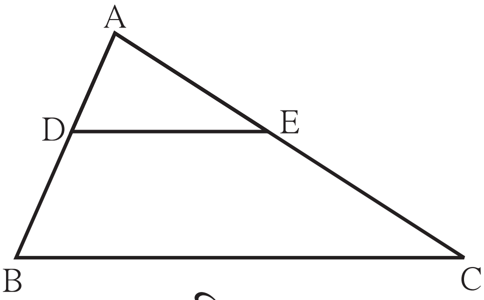
आकृति 1.28

हल किए गए उदाहरण

उदा (1) Δ ABC में DE || BC

DB = 5.4 सेमी, AD = 1.8 सेमी

EC = 7.2 सेमी तो AE का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.29

हल : Δ ABC में DE || BC

$\therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ..... (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

$\therefore \dfrac{1.8}{5.4} = \dfrac{AE}{7.2}$

$AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

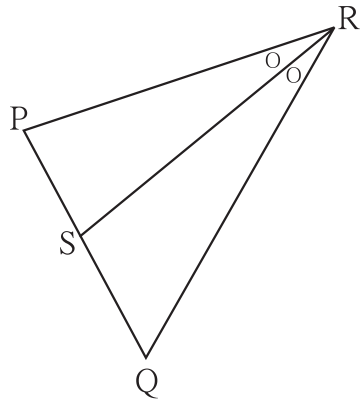
$AE = \dfrac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 सेमी

उदा. (2) Δ PQR में रेख RS यह $\angle$R की समद्विभाजक है ।

PR = 15, RQ = 20, PS = 12

तो SQ का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.30

हल : Δ PRQ में रेख RS यह $\angle$R की समद्विभाजक है ।

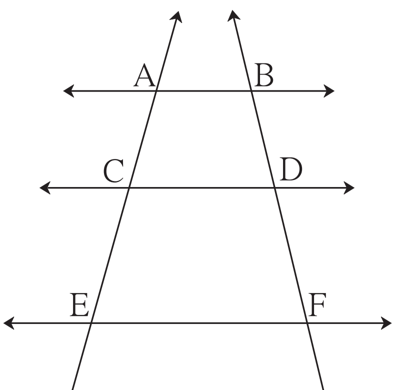
$\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{PS}{SQ}$ . . . . . . (कोण समद्विभाजक का प्रमेय)

$\dfrac{15}{20} = \dfrac{12}{SQ}$

$SQ = \dfrac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

कृति :



आकृति 1.31

संलग्न आकृति में AB || CD || EF

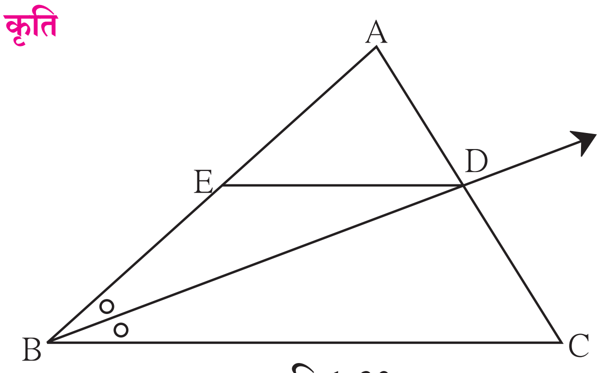
यदि AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 तो चौखटों को भरकर DF का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : AB || CD || EF

$\dfrac{AC}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ . . . . . ($\boxed{}$)

$\dfrac{5.4}{9} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ $\quad \therefore$ DF = $\boxed{}$

कृति



आकृति 1.32

Δ ABC में किरण BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक है । रेख A-D-C, रेख DE || भुजा BC, A-E-B तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

उपपत्ति : Δ ABC में किरण BD यह $\angle$ B की समद्विभाजक है ।

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (कोण समद्विभाजक प्रमेय) .... (I)

Δ ABC में DE || BC

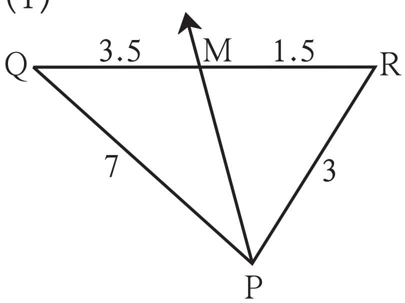
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... ($\boxed{}$) .... (II)

$\frac{AB}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{EB}$ .... (I) तथा (II) से

प्रश्नसंग्रह 1.2

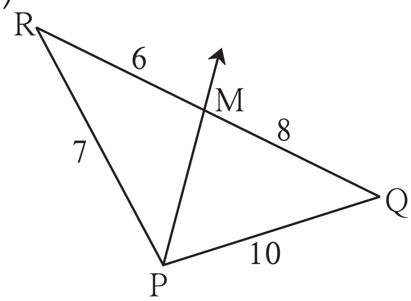
1. नीचे कुछ त्रिभुज और उनके रेखाखंडों की लंबाई दी गई है । इस आधार पर पहचानिए कि किस आकृति में किरण PM यह $\angle$ QPR की समद्विभाजक है ।

(1)



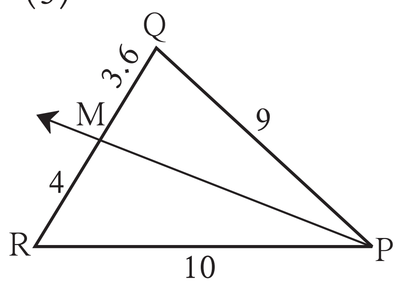
आकृति 1.33

(2)



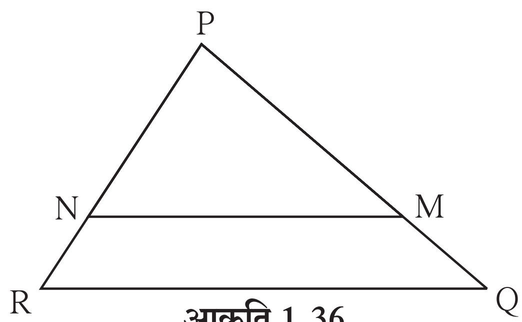
आकृति 1.34

(3)



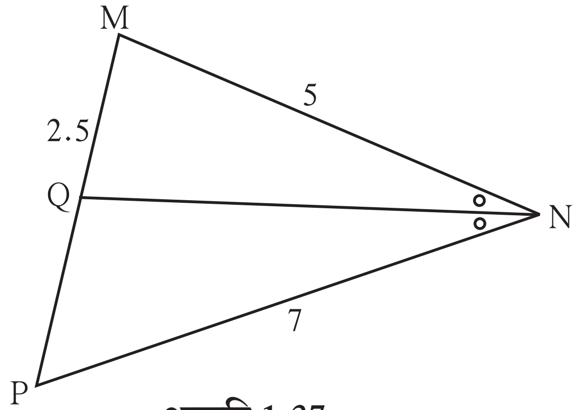
आकृति 1.35

2. Δ PQR में PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 तो बताइए रेख NM भुजा RQ के समांतर है क्या ? कारण लिखिए ।

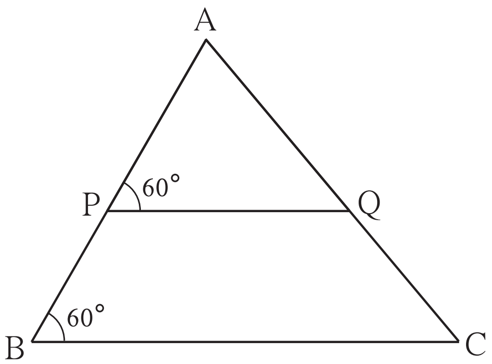


आकृति 1.36

3. Δ MNP में रेख NQ यह $\angle$ N की समद्विभाजक है। यदि MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 तो QP का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 1.37

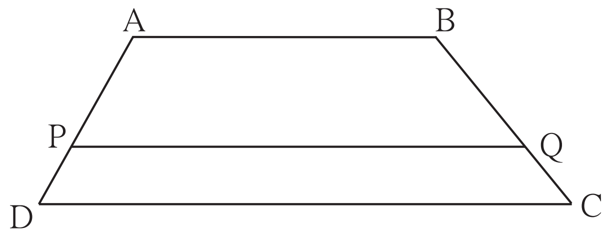


आकृति 1.38

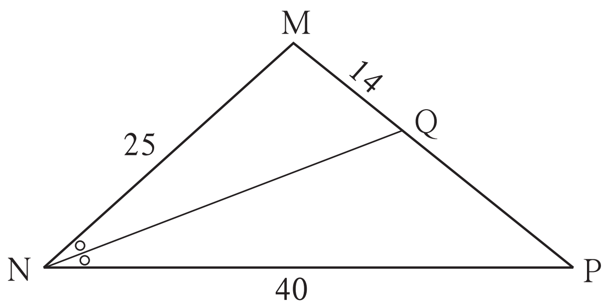
4. आकृति 1.38 में कुछ कोणों के माप दिए गए हैं। इनके आधार पर सिद्ध कीजिए कि,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

5. समलंब चतुर्भुज ABCD में, भुजा AB || भुजा PQ || भुजा DC, यदि AP = 15, PD = 12, QC = 14 तो BQ का मान ज्ञात कीजिए।



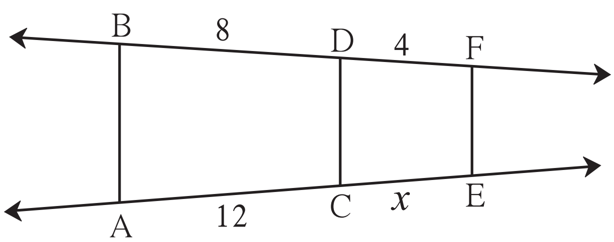
आकृति 1.39



आकृति 1.40

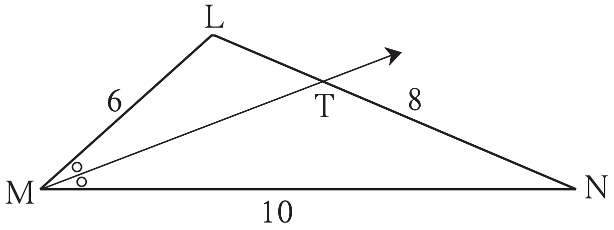
6. आकृति 1.40 में दी गई जानकारी के आधार पर QP का मान ज्ञात कीजिए।

7. संलग्न आकृति 1.41 में AB || CD || FE तो x तथा AE का मान ज्ञात कीजिए।



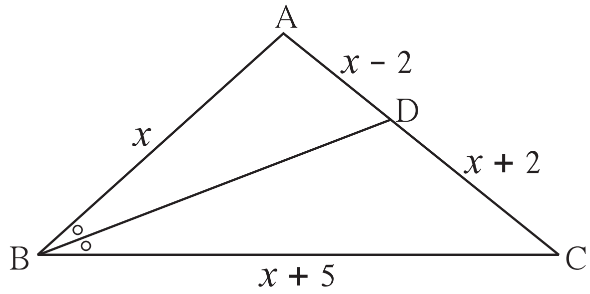
आकृति 1.41

8. Δ LMN में किरण MT यह $\angle$ LMN की समद्विभाजक है ।
LM = 6, MN = 10, TN = 8 तो LT का मान ज्ञात कीजिए ।



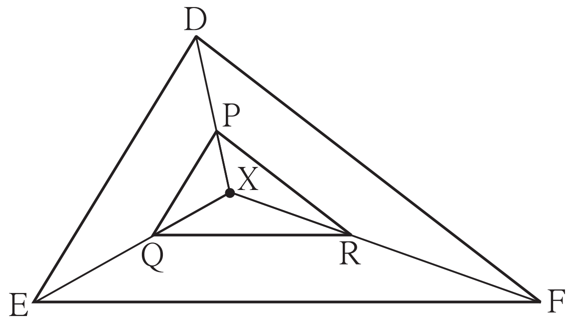
आकृति 1.42

9. Δ ABC में रेख BD यह $\angle$ ABC की समद्विभाजक है, यदि AB = x, BC = $x + 5$
AD = $x - 2$, DC = $x + 2$
तो x का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 1.43

10. संलग्न आकृति 1.44 में त्रिभुज के अंत:भाग में स्थित एक बिंदु X है । बिंदु X को त्रिभुज के शीर्षबिंदुओं से जोड़ा गया है । इसी प्रकार रेख PQ || रेख DE, रेख QR || रेख EF, तो रेख PR || रेख DF को सिद्‌ध करने के लिए निम्नलिखित चौखटों को पूरा कीजिए ।



आकृति 1.44

उपपत्ति : Δ XDE में PQ || DE .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{XP}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{QE}$ .... (I) (समानुपात का मूलभूत प्रमेय)

Δ XEF में QR || EF .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ....(II) $\boxed{}$

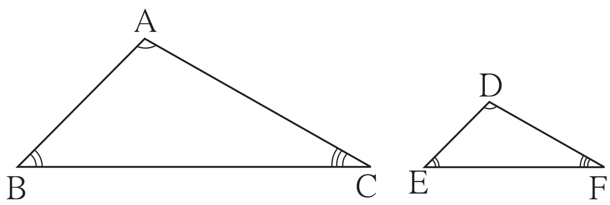
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... कथन (I) तथा (II) से

$\therefore$ रेख PR || रेख DF .... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

11★. Δ ABC में AB = AC, $\angle$ B तथा $\angle$ C के समद्विभाजक भुजा AC तथा भुजा BC को क्रमश: बिंदु D तथा E पर प्रतिच्छेदित करते हैं । तो सिद्‌ध कीजिए कि रेख ED || रेख BC

थोड़ा याद करें

समरूप त्रिभुज (Similar triangles)



आकृति 1.45

Δ ABC तथा Δ DEF में यदि $\angle A \cong \angle D$,

$\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

और $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

तो Δ ABC तथा Δ DEF यह त्रिभुज समरूप होते हैं ।

Δ ABC तथा Δ DEF समरूप है इसे $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ के रूप में लिखा जाता है ।

आओ जानें

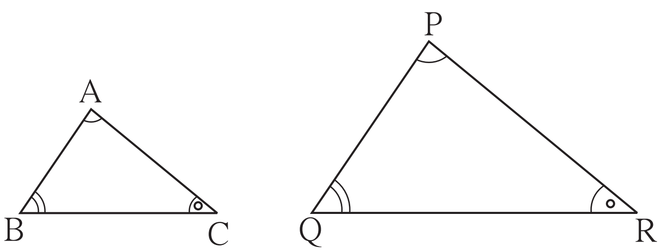
त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ (Tests for similarity of triangles)

दो त्रिभुज समरूप हों इसके लिए उनकी तीनों संगतभुजाएँ समानुपात में हों और तीनों संगत कोणों का सर्वांगसम होना अनिवार्य होता है । परंतु इन छह शर्तों में से किसी भी तीन विशिष्ट शर्तों की पूर्ति हो जाने पर शेष सभी शर्तें अपने आप पूरी हो जाती हैं । अर्थात दो त्रिभुजों के समरूप होने लिए कोई भी तीन विशिष्ट शर्तें ही पर्याप्त होती हैं । इन तीनों शर्तों को जाँच कर यह निश्चित किया जा सकता है कि दिए गए दोनों त्रिभुज समरूप हैं । इन पर्याप्त शर्तों को 'समरूपता की कसौटी' कहते हैं । अर्थात वे दो त्रिभुज समरूप हैं यह निश्चित करने के लिए उन विशिष्ट शर्तों को खोजना पर्याप्त होता है ।

समरूपता की कोकोको कसौटी (AAA test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई एकैकी संगति के अनुसार बनने वाले तीनो संगत कोण यदि सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।

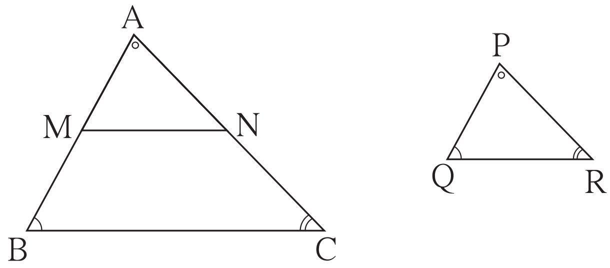
Δ ABC तथा Δ PQR में $ABC \leftrightarrow PQR$ इस संगति में यदि $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ तो $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



आकृति 1.46

अधिक जानकारी हेतू :

कोकोको कसौटी की उपपत्ति



आकृति 1.47

दत्त : Δ ABC तथा Δ PQR में,
$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$.

साध्य : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

उपपत्ति : माना Δ ABC यह Δ PQR से बड़ा है । अब AB पर बिंदु M, AC पर बिंदु N इसप्रकार लीजिए कि, AM = PQ और AN = PR । इस आधारपर दिखाइए कि, $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ । इस आधारपर MN $||$ BC दिखा सकते हैं ।

अब समानुपात के मूलभूत प्रमेय का उपयोग कर $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

अर्थात, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (विपर्यस्थानुपात की क्रिया से)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (योगानुपात की क्रिया से)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ इसी प्रकार $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ यह दिखा सकते है ।

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ मिलता है । $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

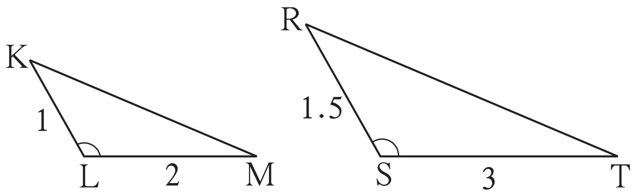
समरूप त्रिभुजों की कोको कसौटी (A A test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्ष बिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार एक त्रिभुज के दो कोण यदि दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो पहले त्रिभुज का तीसरा कोण दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के सर्वांगसम होता है, यह हमें ज्ञात है ।

इसलिए किसी एक त्रिभुज के दोनों कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के सर्वांगसम हों तो यह शर्त दो त्रिभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त होती है । इस शर्त को समरूपता की कोको कसौटी कहते हैं ।

समरूपता की भु को भु कसौटी (SAS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार यदि उनकी संगत भुजाओं की दो जोड़ियाँ समानुपात में हों और उन भुजाओं में समाविष्ट कोण सर्वांगसम हों तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं । समरूपता की इस कसौटी को भुकोभु कसौटी कहते हैं ।



आकृति 1.48

उदाहरणार्थ, Δ KLM तथा Δ RST में

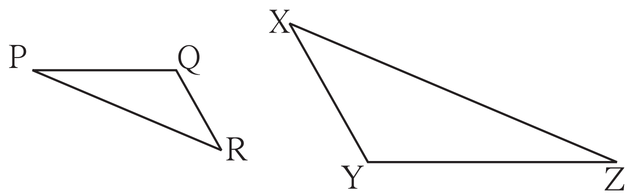
यदि $\angle KLM \cong \angle RST$

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

तो $\Delta KLM \sim \Delta RST$

समरूपता की भु भु भु कसौटी (SSS test for similarity of triangles)

दो त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं की दी गई किसी एकैकी संगति के अनुसार जब एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समानुपात में हो तो वे त्रिभुज समरूप होते हैं । समरूपता की इस कसौटी को भु भु भु कसौटी कहते हैं ।



आकृति 1.49

उदाहरणार्थ, Δ PQR तथा Δ XYZ में यदि

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

तो $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म :

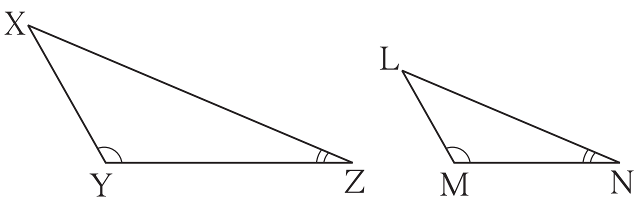
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – परावर्तकता (Reflexivity)

(2) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – सममिति (Symmetry)

(3) यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तथा $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ तो $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – संक्रामकता (Transitivity)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) Δ XYZ में $\angle Y = 100°$, $\angle Z = 30°$, Δ LMN में $\angle M = 100°$, $\angle N = 30°$, तो क्या Δ XYZ तथा Δ LMN समरूप है ? यदि हों तो किस कसौटी के अनुसार ?



आकृति 1.50

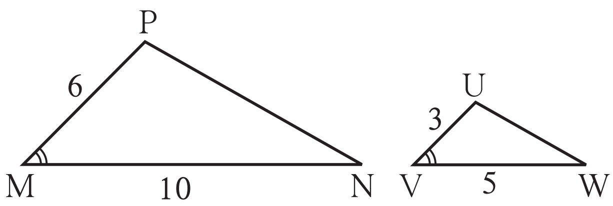
हल : Δ XYZ तथा Δ LMN में,

$\angle Y = 100^\circ$, $\angle M = 100^\circ$ $\therefore$ $\angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30^\circ$, $\angle N = 30^\circ$ $\therefore$ $\angle Z \cong \angle N$

$\therefore$ Δ XYZ ~ Δ LMN .... (को को कसौटी अनुसार)

उदा. (2) आकृति में दी गई जानकारी के आधारपर क्या यह त्रिभुज समरूप हैं? यदि है तो किस कसौटी के अनुसार?



आकृति 1.51

हल : Δ PMN तथा Δ UVW में

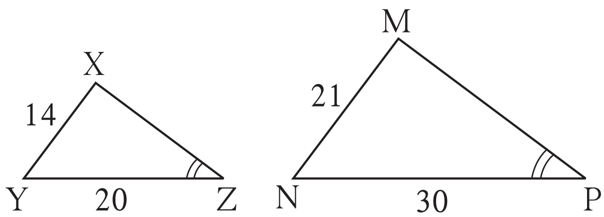
$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$$

और $\angle M \cong \angle V$ .... (दत्त)

$\therefore$ Δ PMN ~ Δ UVW .... (समरूपता की भु को भु कसौटी)

उदा. (3) आकृति में दी गई जानकारी के आधारपर क्या इन त्रिभुजों को समरूप कहा जा सकता है? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?



आकृति 1.52

हल : Δ XYZ तथा Δ MNP में

$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

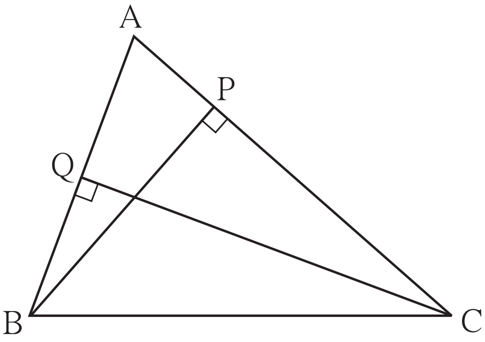
$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$$

$\angle Z \cong \angle P$ दिया गया है। परंतु $\angle Z$ तथा $\angle P$ समानुपाति भुजाओं में समाविष्ट कोण नहीं हैं।

$\therefore$ Δ XYZ तथा Δ MNP समरूप हैं ऐसा नहीं कह सकते।

उदा. (4)



आकृति 1.53

संलग्न आकृति में BP $\perp$ AC, CQ $\perp$ AB, A–P–C, A–Q–B , तो सिद्ध कीजिए कि Δ APB तथा Δ AQC समरूप हैं।

हल : Δ APB तथा Δ AQC में

$\angle$ APB = $\boxed{\quad}^\circ$ (I)

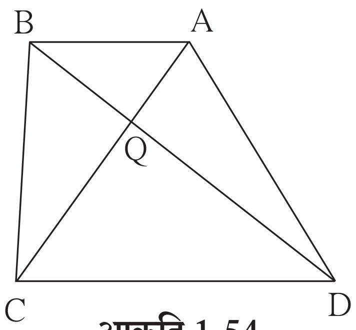
$\angle$ AQC = $\boxed{\quad}^\circ$ (II)

$\therefore$ $\angle$ APB $\cong$ $\angle$ AQC .... (I) और (II) से

$\angle$ PAB $\cong$ $\angle$ QAC .... ($\boxed{\quad}$)

$\therefore$ Δ APB ~ Δ AQC ..... को को कसौटी

उदा. (5) यदि चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करते हों और 2QA = QC तथा 2QB = QD. तो सिद्ध कीजिए कि, DC = 2AB ।



आकृति 1.54

दत्त : 2QA = QC

2QB = QD

साध्य : CD = 2AB

उपपत्ति : 2QA = QC $\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{1}{2}$ .... (I)

2QB = QD $\therefore \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (I) तथा (II) से

Δ AQB तथा Δ CQD में

$\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (सिद्ध किया है ।)

$\angle$ AQB $\cong$ $\angle$ DQC .... (शीर्षाभिमुख कोण)

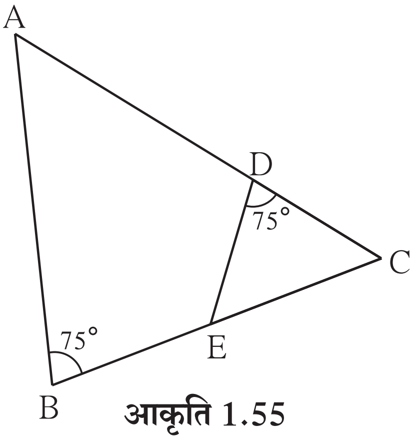
$\therefore$ Δ AQB ~Δ CQD .... (समरूपता की भु को भु कसौटी)

परंतु $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{AB}{CD}$ .... (संगत भुजाएँ समानुपात में)

$\therefore \dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{1}{2} \quad \therefore \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2}$

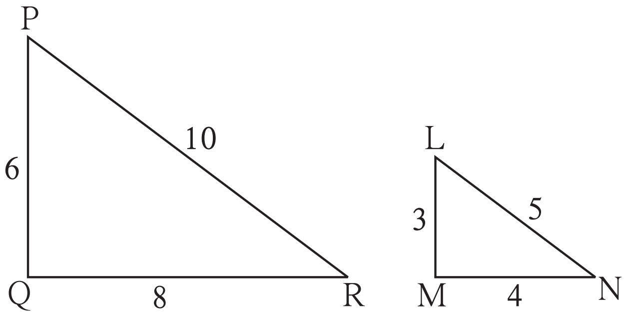
$\therefore$ 2AB = CD

प्रश्नसंग्रह 1.3



आकृति 1.55

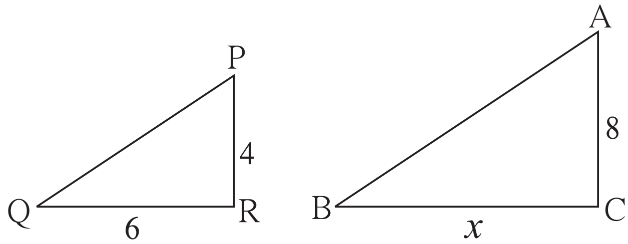
1. आकृति 1.55 में $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle EDC = 75^\circ$ तो इनमें दो त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार समरूप हैं ?
उनकी समरूपता की एकैकी संगति लिखिए ।



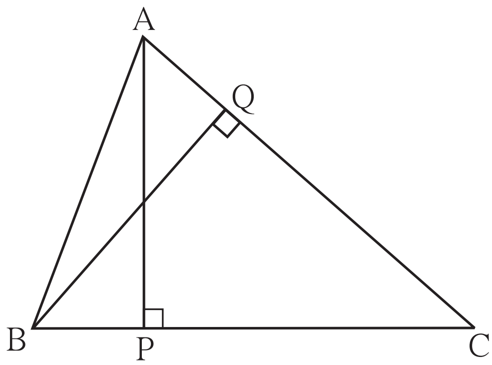
आकृति 1.56

2. संलग्न आकृति 1.56 में, दिए गए त्रिभुज क्या समरूप हैं ? यदि हाँ तो किस कसौटी के अनुसार ?

3. आकृति 1.57 में दर्शाएअनुसार 8 मीटर तथा 4 मीटर ऊँचाईवाले दो खंभे समतल जमीन पर खड़े हैं। सूर्य के प्रकाश से छोटे खंभे की परछाई 6 मीटर होती हो तो उसी समय बड़े खंभे की परछाईं की लंबाई कितनी होगी ?



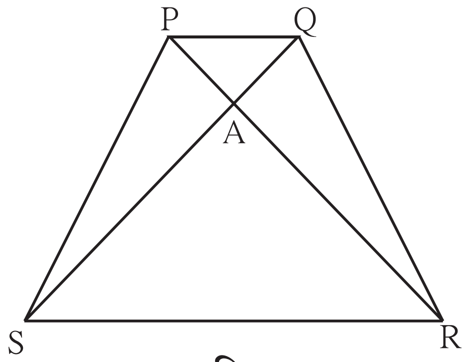
आकृति 1.57



आकृति 1.58

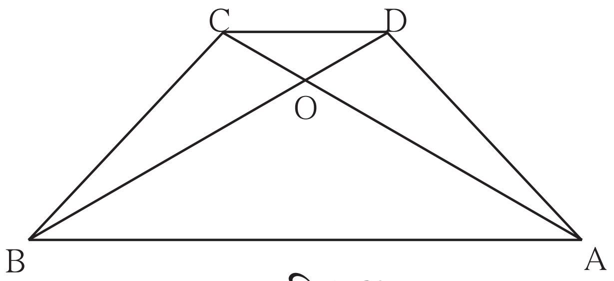
4. Δ ABC में $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$
B– P–C, A–Q – C तो सिद्ध कीजिए कि
Δ CPA $\sim \Delta$ CQB ।
यदि AP = 7, BQ = 8, BC = 12
तो AC का मान ज्ञात कीजिए ।

5. संलग्न आकृति में □ PQRS एक समलंब चतुर्भुज है । जिसमें भुजा PQ || भुजा SR, AR = 5AP, AS = 5AQ तो सिद्ध कीजिए कि, SR = 5PQ



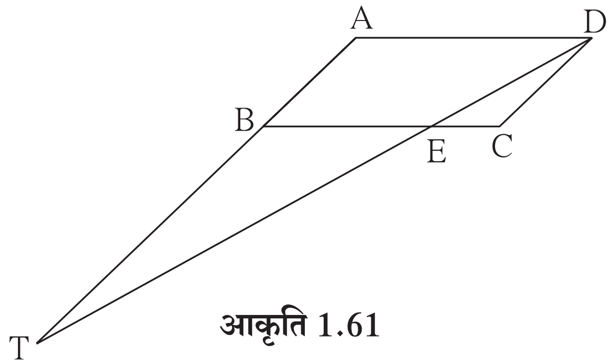
आकृति 1.59

6. समलंब चतुर्भुज ABCD में, भुजा AB || भुजा DC विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि AB = 20, DC = 6, OB = 15 तो OD का मान ज्ञात कीजिए ।



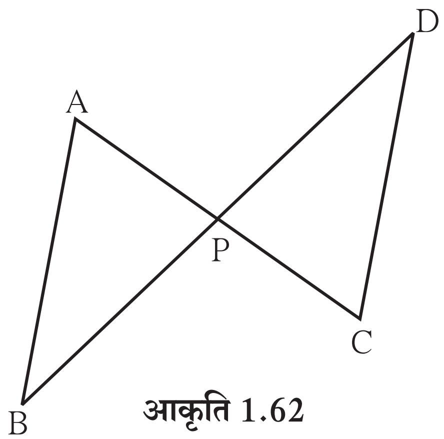
आकृति 1.60

7. □ABCD एक समांतर चतुर्भुज है । भुजा BC पर E कोई एक बिंदु है ; रेखा DE रेख AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है । तो सिद्ध कीजिए कि DE × BE = CE × TE ।



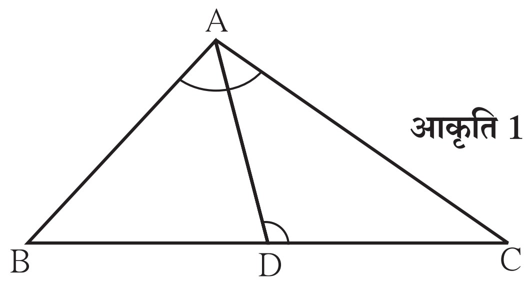
आकृति 1.61

8. संलग्न आकृति में रेख AC तथा रेख BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं और $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ तो सिद्ध कीजिए कि, Δ ABP ~ Δ CDP

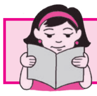


आकृति 1.62

9. संलग्न आकृति में Δ ABC में बिंदु D यह भुजा BC पर इस प्रकार है, कि $\angle$ BAC = $\angle$ ADC तो सिद्ध कीजिए कि, $CA^2 = CB \times CD$



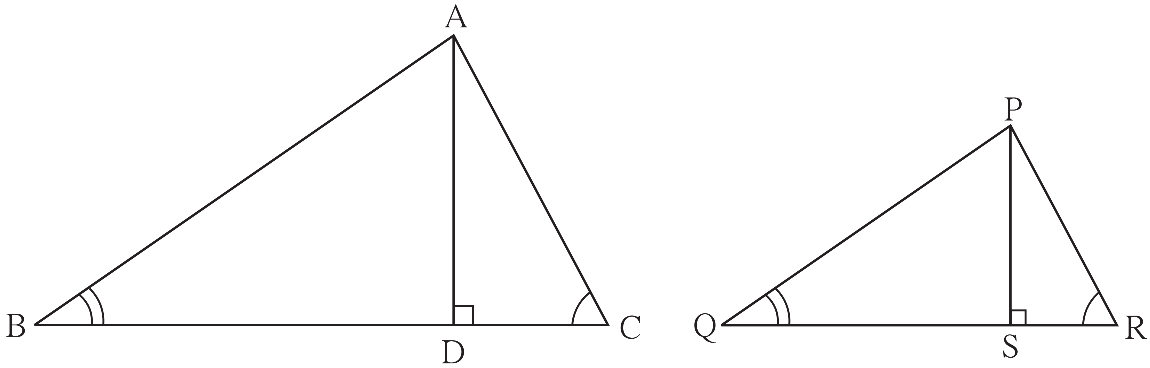
आकृति 1.63



आओ जानें

समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय (Theorem of areas of similar triangles)

प्रमेय : **दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।**



आकृति 1.64

दत्त : $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR,\ AD \perp BC,\ PS \perp QR$

साध्य : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

उपपत्ति : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

$\Delta\, ABD$ तथा $\Delta\, PQS$ में

$\angle B = \angle Q$ .... (दत्त)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ को को कसौटी के अनुसार $\Delta\, ABD \sim \Delta\, PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

परंतु $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) तथा (III) से

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, A(Δ ABC) = 16 , A(Δ PQR) = 25 तो $\frac{AB}{PQ}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : ΔABC ~ Δ PQR

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है ।)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (वर्गमूल ज्ञात करनेपर)

उदा. (2) दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 2:5 है, छोटे त्रिभुज का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

हल : माना Δ ABC ~ Δ PQR ।

माना Δ ABC छोटा त्रिभुज तथा Δ PQR बड़ा त्रिभुज है ।

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात)

$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

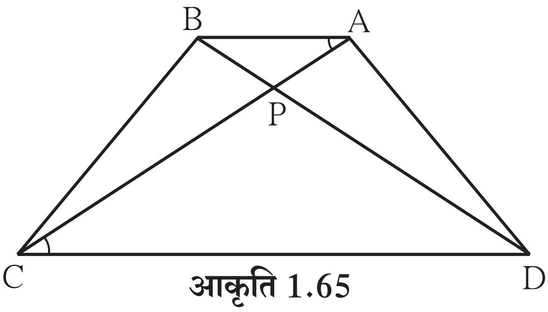
$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी

उदा. (3) समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB || भुजा CD, विकर्ण AC तथा विकर्ण BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं तो सिद्ध कीजिए कि, $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$

हल : समलंब चतुर्भुज ABCD में भुजा AB || भुजा CD



आकृति 1.65

Δ APB तथा ΔCPD में

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ...... (एकांतर कोण)

$\angle APB \cong \angle CPD$ .... (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ .... (को को कसौटी)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का प्रमेय)

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 3:5 हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

2. Δ ABC ~ Δ PQR और AB : PQ = 2 : 3 तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A(Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125 तो निम्नलिखित रिक्त चौखटों को पूरा कीजिए ।

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \boxed{})} = \frac{80}{125} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, 9 × A (ΔPQR) = 16 × A (ΔLMN), यदि QR = 20 तो MN का मान ज्ञात कीजिए ।

5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 225 वर्ग सेमी तथा 81 वर्ग सेमी है । यदि छोटे त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज की संगत भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

6. समबाहु Δ ABC तथा Δ DEF में A(ΔABC) : A(Δ DEF) = 4 : 7 AB = 4 तो DE की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

7. आकृति 1.66 में रेख PQ || रेख DE यदि A(Δ PQF) = 20 वर्ग इकाई, PF = 2 DP है, तो A($\square$ DPQE) ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

A(Δ PQF) = 20 वर्ग इकाई, PF = 2 DP, माना DP = x $\therefore$ PF = $2x$

DF = DP + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = $3x$

Δ FDE तथा Δ FPQ में ।

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोण)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (संगत कोण)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (को को कसौटी)

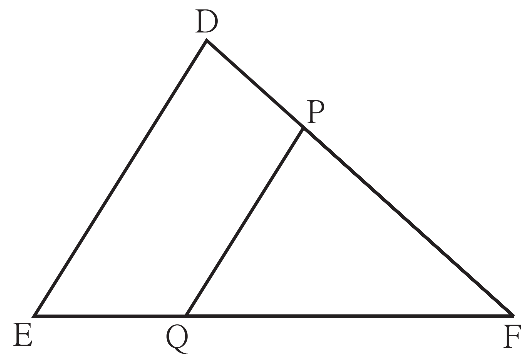
$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{} = \boxed{}$$

A($\square$ DPQE) = A(Δ FDE) − A(Δ FPQ)

= $\boxed{}$ − $\boxed{}$

= $\boxed{}$



आकृति 1.66

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित उपप्रश्नों के पर्यायी उत्तर दिए गए हैं । इनमें से सही पर्याय चुनिए ।

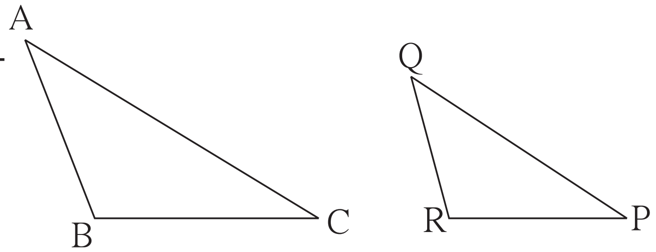
(1) यदि Δ ABC तथा Δ PQR में किसी एकैकी संगति से यदि $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC

(B) Δ PQR ~ Δ CAB

(C) Δ CBA ~ Δ PQR

(D) Δ BCA ~ Δ PQR

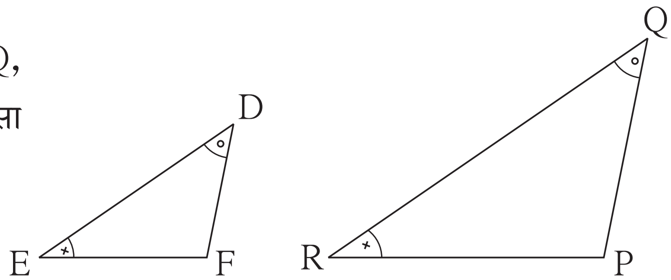


आकृति 1.67

(2) यदि Δ DEF तथा Δ PQR में $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$ तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



आकृति 1.68

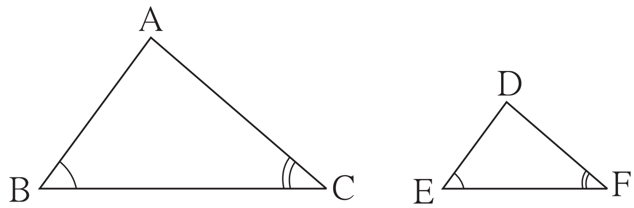
(3) Δ ABC तथा Δ DEF में $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ और AB = 3 DE, तो इन दोनों त्रिभुजों के लिए कौन-सा कथन सत्य है?

(A) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप नहीं हैं ।

(B) दोनों त्रिभुज समरूप हैं परंतु सर्वांगसम नहीं हैं ।

(C) दोनों त्रिभुज सर्वांगसम और समरूप दोनों हैं ।

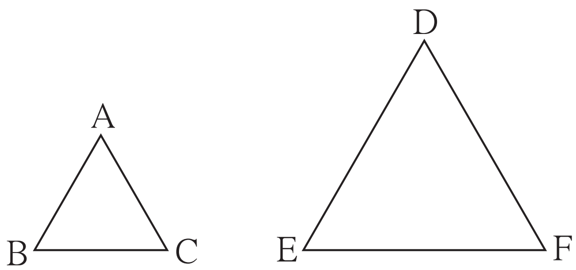
(D) उपर्युक्त में से कोई भी कथन सत्य नहीं है ।



आकृति 1.69

(4) समबाहु Δ ABC तथा Δ DEF में, A (Δ ABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 होनेपर AB = 4 हो तो DE की लंबाई कितनी ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

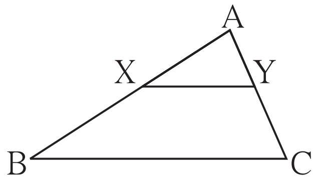


आकृति 1.70

(5) आकृति 1.71 में रेख XY || रेख BC तो निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



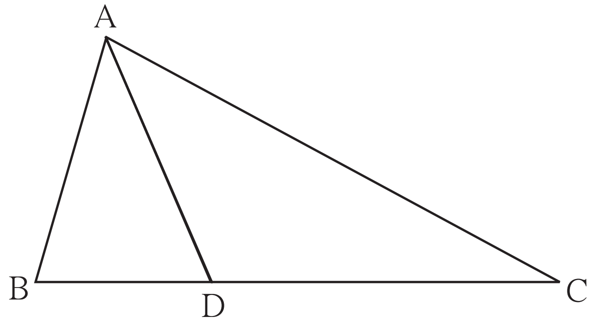
आकृति 1.71

2. Δ ABC में B - D - C और BD = 7, BC = 20 तो निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

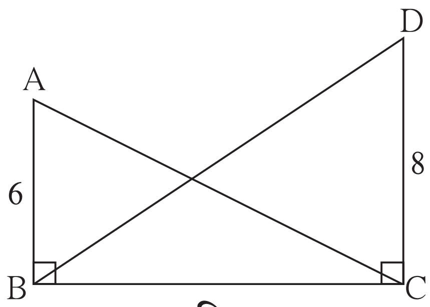
(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



आकृति 1.72

3. समान ऊँचाईवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 2 : 3 है, छोटे त्रिभुज का आधार 6 सेमी हो तो बड़े त्रिभुज का संगत आधार कितना होगा ?

4. 

आकृति 1.73

आकृति 1.73 में $\angle ABC = \angle DCB = 90°$

AB = 6, DC = 8

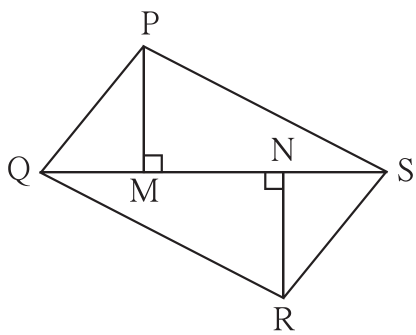
तो $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = कितना ?

5. आकृति 1.74 में PM = 10 सेमी

A(Δ PQS) = 100 वर्ग सेमी

A(ΔQRS) = 110 वर्ग सेमी

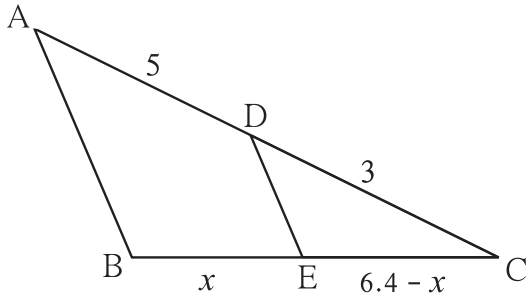
तो NR का मान ज्ञात कीजिए।



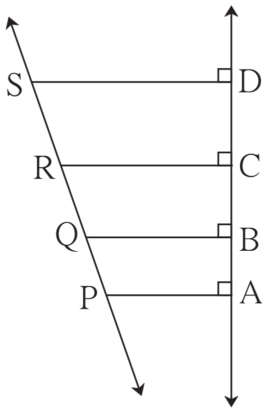
आकृति 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS, बिंदु T से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 5 तथा बिंदु S से खींचे गए शीर्षलंब की लंबाई 9 है, तो $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ यह अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. आकृति 1.75 में A – D – C व B – E – C रेख DE $\parallel$ भुजा AB यदि AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 तो BE का मान ज्ञात कीजिए ।



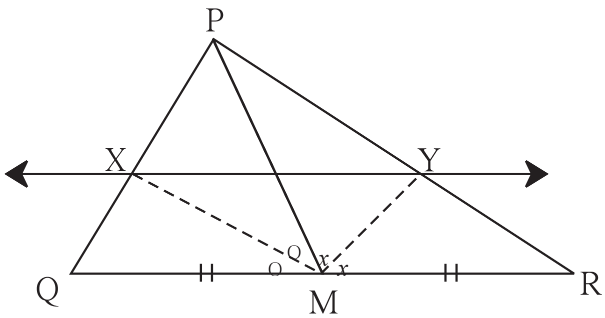
आकृति 1.75



आकृति 1.76

8. आकृति 1.76 में, रेख PA, रेख QB, रेख RC तथा रेख SD ये रेखा AD पर लंब हैं । AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280 तो PQ, QR, RS का मान ज्ञात कीजिए ।

9. Δ PQR में रेख PM माध्यिका है । $\angle$PMQ तथा $\angle$PMR के समद्विभाजक भुजा PQ तथा भुजा PR को क्रमश: बिंदु X और बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि, XY $\parallel$ QR.



आकृति 1.77

दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

Δ PMQ में किरण MX यह $\angle$PMQ की समद्विभाजक है ।

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)

Δ PMR में किरण MY यह $\angle$PMR की समद्विभाजक है ।

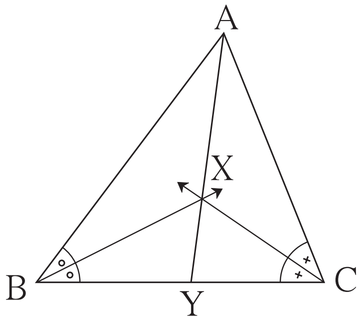
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (II) (कोण समद्विभाजक प्रमेय)

परंतु $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MP}{MR}$ .... (बिंदु M यह QR का मध्य बिंदु है अर्थात MQ = MR)

$\therefore \dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YR}$

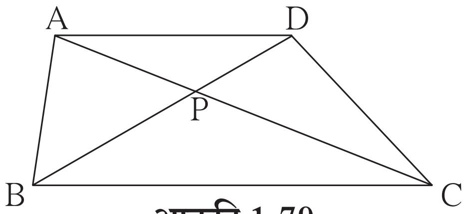
$\therefore$ XY $\parallel$ QR .... (समानुपात के मूलभूत प्रमेय का विलोम)

10. आकृति 1.78 Δ ABC में $\angle$ B तथा $\angle$ C के समद्विभाजक परस्पर एक दूसरे को बिंदु X पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा AX यह भुजा BC को बिंदु Y पर प्रतिच्छेदित करती है; यदि AB = 5, AC = 4, BC = 6 तो $\frac{AX}{XY}$ का मान ज्ञात कीजिए।



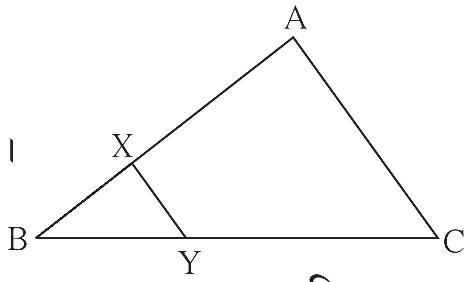
आकृति 1.78

11. $\square$ ABCD में रेख AD $\parallel$ रेख BC. विकर्ण AC और विकर्ण BD परस्पर एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$



आकृति 1.79

12. आकृति 1.80 में रेख XY $\parallel$ भुजा AC. यदि 2AX = 3BX और XY = 9 तो AC का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए।



आकृति 1.80

कृति : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{\boxed{}}$ .... (योगानुपात की क्रिया से)

$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I)

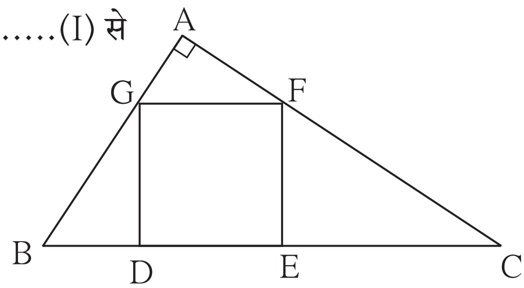
Δ BCA ~ Δ BYX .... (समरूपता की $\boxed{}$ कसौटी)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\boxed{}$ ....(I) से

13*. आकृति 1.81 में $\square$ DEFG एक वर्ग है। Δ ABC में $\angle$ A = 90°, बिंदु F भुजा AC पर स्थित है। तो सिद्ध कीजिए कि, $DE^2 = BD \times EC$

(Δ GBD तथा Δ CFE को समरूप दिखाइए और GD = FE = DE का उपयोग कीजिए।)



आकृति 1.81

PF5BJV

❏❏❏

2 पायथागोरस का प्रमेय

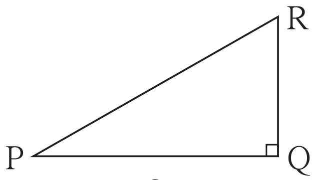
आओ सीखें

- पायथागोरस का त्रिक्
- ज्यामितीय माध्य का प्रमेय
- पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन
- समकोण त्रिभुजों की समरूपता
- पायथागोरस का प्रमेय
- अपोलोनियस का प्रमेय

थोड़ा याद करें

पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.1

आकृति 2.1 देखिए Δ PQR में $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

इसे हम $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ऐसा लिखेंगे ।

Δ PQR में भुजा PQ, QR तथा PR की लंबाई क्रमशः r, p और q इन चिन्हों से दर्शाई जाती है । इस प्रकार आकृति 2.1 के संदर्भ में पायथागोरस के प्रमेय को $q^2 = p^2 + r^2$ ऐसा भी लिखा जा सकता है।

पायथागोरस के त्रिक् :

प्राकृत संख्याओं के त्रिक् में यदि बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर हो तो उन्हें पायथागोरस का त्रिक् कहते हैं ।

उदाहरणार्थ :(11, 60, 61) इन संख्याओं के त्रिक् में,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ और $121 + 3600 = 3721$

यहाँ पर बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है ।

$\therefore$ 11, 60, 61 यह 'पायथागोरस का त्रिक्' है ।

उसी प्रकार (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) भी पायथागोरस के त्रिक् हैं, इसकी जाँच करें ।

'पायथागोरस के त्रिक्' की संख्याओं को किसी भी क्रम से लिखा जा सकता है ।

अधिक जानकारी हेतू :

पायथागोरस के त्रिक् प्राप्त करने का सूत्र :

यदि a, b, c प्राकृत संख्या हों और $a > b$, तो $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ ये पायथागोरस के त्रिक् हैं ।

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) तथा (III) से, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ यह पायथागोरस का त्रिक् है ।

पायथागोरस के विभिन्न त्रिक् प्राप्त करने के लिए इसे सूत्र के रूप में उपयोग करते हैं ।

उदाहरणार्थ, $a = 5$ और $b = 3$ हो तो,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ और $2ab = 30$.

(34, 16, 30) ये पायथगोरस के त्रिक् हैं, इसे आप जाँच करके देखिए ।

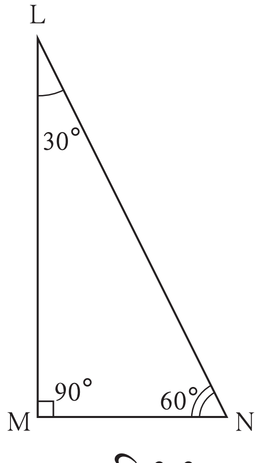
a और b के लिए भिन्न प्राकृत संख्या लेकर सूत्र के आधार पर पायथागोरस के 5 त्रिक् तैयार कीजिए ।

पिछली कक्षा में हमने **30°– 60°– 90°** और **45°– 45°– 90°** कोण वाले समकोण त्रिभुजों के गुणधर्म देखे हैं ।

(I) 30°–60°–90° माप वाले त्रिभुज का गुणधर्म

यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण 30° तथा 60° हों तो 30° मापवाले कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई के आधी तथा 60° मापवाले कोण की सम्मुख भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई का $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुना होती है ।

आकृति 2.2 देखिए Δ LMN में, $\angle$ L = 30°, $\angle$ N = 60°, $\angle$ M = 90°



आकृति 2.2

$\therefore$ 30° माप वाले कोण की सम्मुख भुजा MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

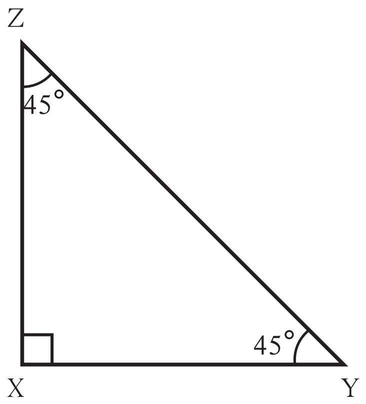
60° माप वाले कोण की सम्मुख भुजा LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

यदि LN = 6 सेमी हो तो MN तथा LM का मान ज्ञात कीजिए ।

MN = $\frac{1}{2} \times$ LN	LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN
= $\frac{1}{2} \times 6$	= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$
= 3 सेमी	= $3\sqrt{3}$ सेमी

(II) $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ माप वाले त्रिभुज का गुणधर्म

यदि किसी समकोण त्रिभुज के न्यून कोणों के माप 45° तथा 45° हों तो समकोण को समाविष्ट करने वाली प्रत्येक भुजा की लंबाई कर्ण की लंबाई का $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना होती है ।



आकृति 2.3

आकृति 2.3 Δ XYZ में, $\angle X = 90^\circ$,

$\angle Z = \angle Y = 45^\circ$

तब $XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$

$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$

यदि $ZY = 3\sqrt{2}$ सेमी तो XY और XZ का मान ज्ञात कीजिए ।

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ $XY = XZ = 3$ सेमी

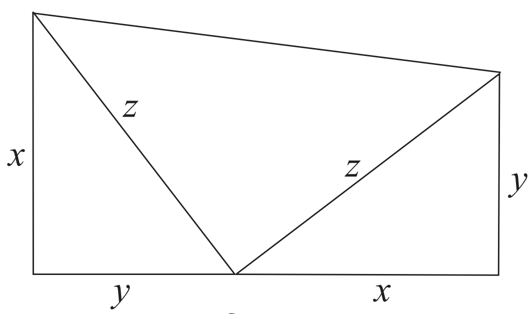
कक्षा 7 वीं में हमने क्षेत्रफल की सहायता से पायथागोरस के प्रमेय का अध्ययन किया है । उसमें हमने चार समकोण त्रिभुज तथा एक वर्ग के क्षेत्रफलों का उपयोग किया था । इसी प्रमेय की उपपत्ति को हम कुछ विभिन्न प्रकार से दे सकते हैं ।

कृति :

आकृति में दर्शाएअनुसार दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज लीजिए । उनके कर्णों की लंबाई के बराबर दो भुजावाला एक समद्‌विबाहु समकोण त्रिभुज लीजिए । इन तीनों समकोण त्रिभुजों की सहायता से एक समलंब चतुर्भुज तैयार कीजिए ।

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योगफल) $\times$ ऊँचाई ;

इस सूत्र का उपयोग कर उनके क्षेत्रफल तीनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर लिखकर पायथागोरस के प्रमेय को सिद्‌ध कीजिए ।



आकृति 2.4

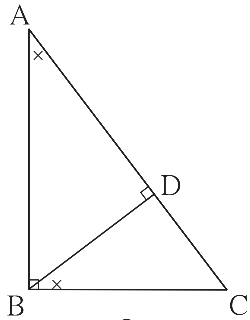
आओ जानें

अब हम पायथगोरस के प्रमेय की उपपत्ति को समरूप त्रिभुजों के आधार पर सिद्ध करेंगे ।

इसे सिद्ध करने के लिए आवश्यक समकोण त्रिभुजों की समरूपता संबंधी गुणधर्म का अध्ययन करेंगे ।

समरूपता और समकोण त्रिभुज (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : **समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींचे गए शीर्षलंब से निर्मित दोनों त्रिभुज परस्पर तथा मूल समकोण त्रिभुज के समरूप होते हैं ।**



आकृति 2.5

दत्त : Δ ABC में $\angle$ ABC = 90°,
रेख BD $\perp$ रेख AC, A-D-C

साध्य : Δ ADB ~ Δ ABC
Δ BDC ~ Δ ABC
Δ ADB ~ Δ BDC

उपपत्ति : Δ ADB और Δ ABC में
$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ BAC ...(सामान्य कोण)
$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ABC ...(प्रत्येक कोण 90°)
Δ ADB ~ Δ ABC ...(को को कसौटी)...(I)

उसी प्रकार Δ BDC और Δ ABC में
$\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ ACB ...(सामान्य कोण)
$\angle$ BDC $\cong$ $\angle$ ABC ...(प्रत्येक कोण 90°)
Δ BDC ~ Δ ABC ...(को को कसौटी)..(II)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC (कथन (I) तथा (II) से) ...(III)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC ~ Δ ABC (कथन (I), (II) तथा (III) से..... संक्रामकता)

ज्यामितीय माध्य का प्रमेय (Theorem of geometric mean)

प्रमेय : **समकोण त्रिभुज में शीर्षबिंदु से कर्ण पर खींचा गया लंबरेखाखंड, कर्ण द्‌वारा विभाजित होने वाले रेखाखंडों का ज्यामितीय माध्य होता है ।**

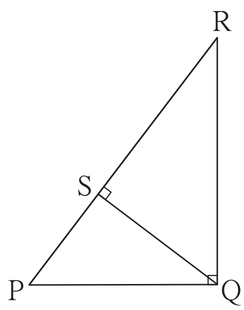
उपपत्ति : समकोण त्रिभुज PQR में, रेख QS $\perp$ कर्ण PR
Δ QSR ~ Δ PSQ .... (समकोण त्रिभुजों की समरूपता)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

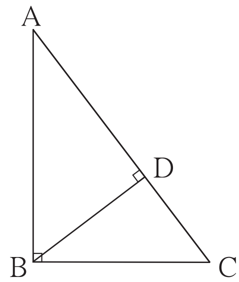
$\therefore$ शीर्षलंब QS यह रेख PS और रेख SR का 'ज्यामितीय माध्य' है ।



आकृति 2.6

पायथागोरस का प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.7

दत्त : Δ ABC में, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदु B से भुजा AC पर एक लंब BD खींचिए A-D-C

उपपत्ति : समकोण Δ ABC में रेख BD $\perp$ कर्ण AC ..... (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (समकोण त्रिभुजों की समरूपता)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – (समरूप त्रिभुजों की संगतभुजाएँ)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

इसीप्रकार, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) तथा (II) का योग करनेपर

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A-D-C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

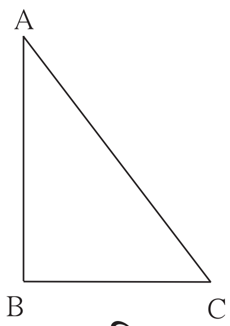
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

पायथागोरस के प्रमेय का विलोम (Converse of Pythagoras theorem)

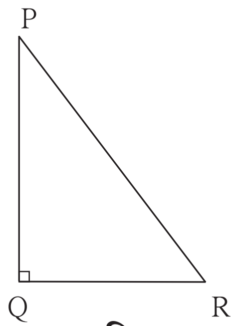
यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है ।

दत्त : Δ ABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृति 2.8



आकृति 2.9

रचना : Δ PQR इसप्रकार खींचिए कि, AB = PQ, BC = QR , $\angle$ PQR = 90°.

उपपत्ति : Δ PQR में, $\angle$ Q = 90°

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (पायथागोरस का प्रमेय)

$= AB^2 + BC^2$ .... (रचना)

$= AC^2$ .... (दत्त)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

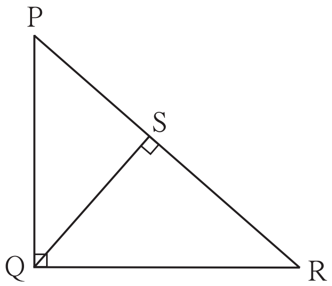
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (भु भु भु कसौटी)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90°$

इसे ध्यान में रखें

(1) (a) समकोण त्रिभुजों की समरूपता



आकृति 2.10

Δ PQR में $\angle$ Q = 90° , रेख QS $\perp$ रेख PR

यहाँ $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ इसी पद्धति से आकृति में बनने वाले सभी समकोण त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं।

(b) ज्यामितीय माध्य का प्रमेय :

उपर्युक्त आकृति में $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ रेख QS यह रेख PS तथा रेख SR इन रेखाखंडों का ज्यामितीय माध्य है।

(2) पायथागोरस का प्रमेय :

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

(3) पायथागोरस के प्रमेय का विलोम :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

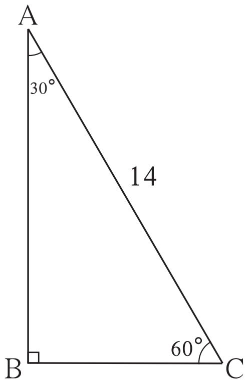
इसके आलावा एक और गुणधर्म अधिक उपयोगी है। उसे भी ध्यान में रखें।

(4) यदि समकोण त्रिभुज में एक भुजा कर्ण की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण 30° होता है। यह गुणधर्म 30°-60°-90° के प्रमेय का विलोम है।

हल किए हुए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 2.11 देखिए। ΔABC में $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC=14$ तो AB तथा BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.11

ΔABC में,

$\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore \angle C = 60^\circ$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ के प्रमेयानुसार,

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

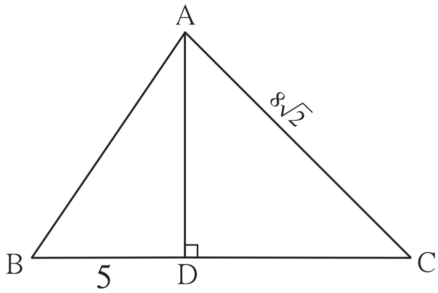
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

उदा. (2) आकृति 2.12 देखिए ΔABC में रेख $AD \perp$ रेख BC, $\angle C = 45^\circ$, $BD = 5$ और $AC = 8\sqrt{2}$, तो AD और BC का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 2.12

ΔADC में,

$\angle ADC = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\therefore \angle DAC = 45^\circ$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... ($45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ के प्रमेयानुसार)

$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$

$BC = BD + DC$

$= 5 + 8$

$= 13$

उदा. (3) आकृति 2.13 में $\angle PQR = 90^\circ$, रेख $QN \perp$ रेख PR, $PN = 9$, $NR = 16$ तो QN ज्ञात कीजिए।

हल : ΔPQR में, रेख $QN \perp$ रेख PR

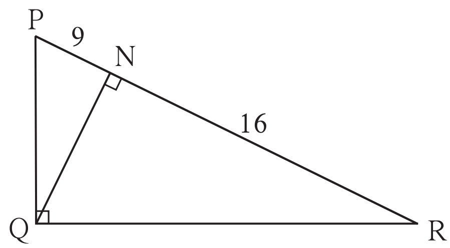
$\therefore QN^2 = PN \times NR$ .... (ज्यामितिय माध्य का प्रमेय)

$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

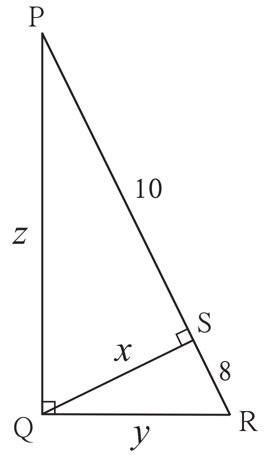
$= 3 \times 4$

$= 12$



आकृति 2.13

उदा. (4) आकृति 2.14 देखो Δ PQR में $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR तो x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.14

हल : Δ PQR में, $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (ज्यामितिय माध्य के प्रमेय)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR में, $\angle$ QSR = 90°

$\therefore \; QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore \; QR = 12$

Δ PSQ में, $\angle$ QSP = 90°

$\therefore \; PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

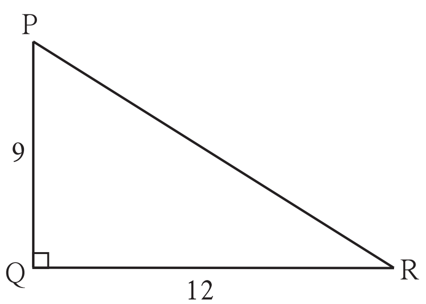
$= 36 \times 5$

$\therefore \; PQ = 6\sqrt{5}$

उत्तर $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

उदा. (5) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमश: 9 सेमी तथा 12 सेमी हों तो उस त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : Δ PQR में, $\angle$ Q = 90°



आकृति 2.15

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पायथागोरस प्रमेयानुसार)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore \; PR^2 = 225$

$\therefore \; PR = 15$

त्रिभुज का कर्ण = 15 सेमी

उदा. (6) Δ LMN में $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तो निश्चित कीजिए कि Δ LMN यह समकोण त्रिभुज है या नहीं। ($\angle$ L, $\angle$ M और $\angle$ N की सम्मुख भुजाएँ क्रमशः l, m तथा n हैं)

हल : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

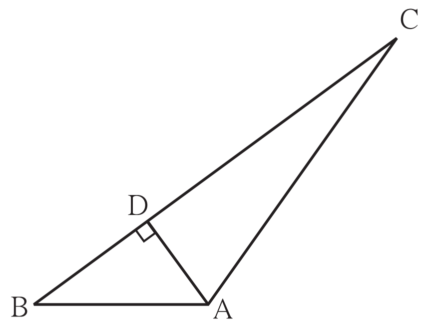
$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ पायथागोरस के प्रमेय के विलोमानुसार Δ LMN समकोण त्रिभुज है।

उदा. (7) आकृति 2.16 देखिए ; Δ ABC में, रेख AD $\perp$ रेख BC, तो सिद्ध कीजिए :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



आकृति 2.16

हल : Δ ADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

Δ ADB में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) और (II) से]

$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

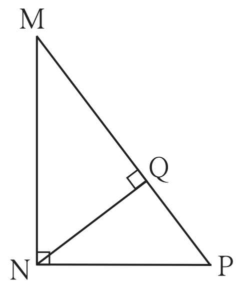
प्रश्नसंग्रह 2.1

1. नीचे दिए गए त्रिकों में से पायथागोरस के त्रिक् पहचानिए। कारण सहित लिखिए।

   (1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

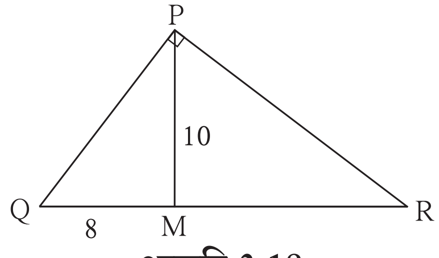
   (4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृति 2.17 में $\angle MNP = 90°$, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तो NQ का मान ज्ञात कीजिए।



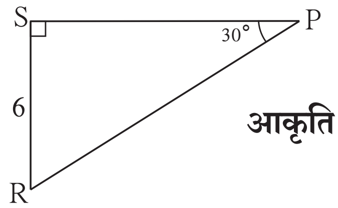
आकृति 2.17

3. आकृति 2.18 में $\angle QPR = 90°$, रेख PM $\perp$ रेख QR और Q-M-R, PM = 10, QM = 8 तो QR का मान ज्ञात कीजिए।

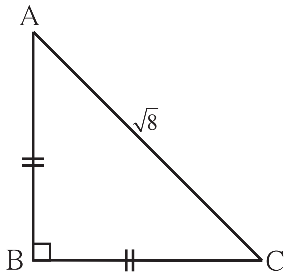


आकृति 2.18

4. आकृति 2.19 Δ PSR में दी गई जानकारी के आधार पर RP और PS ज्ञात कीजिए ।



आकृति 2.19



आकृति 2.20

5. आकृति 2.20 में दी गई जानकारी के आधारपर AB और BC ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।

AB = BC .... $\boxed{}$

$\therefore \quad \angle BAC = \boxed{}$

$\therefore$ AB = BC = $\boxed{} \times AC$

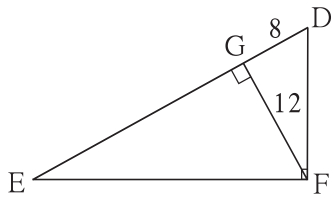
$= \boxed{} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{}$

6. किसी वर्ग के विकर्ण की लंबाई 10 सेमी हो तो उसकी भुजा की लंबाई तथा परिमिति ज्ञात कीजिए ।

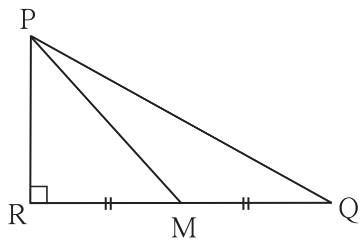
7. आकृति 2.21 में $\angle$ DFE = 90°, रेख FG $\perp$ रेख ED. यदि GD = 8, FG = 12, तो (1) EG (2) FD (3) EF का मान ज्ञात कीजिए ।



आकृति 2.21

8. किसी आयत की लंबाई 35 सेमी तथा चौड़ाई 12 सेमी हो तो उस आयत के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

9★. आकृति 2.22 में M यह भुजा QR का मध्यबिंदु है । $\angle$ PRQ = 90° तो सिद्ध कीजिए कि, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



आकृति 2.22

10★. किसी रास्ते के दोनों ओर स्थित घरों की दीवारें एक दूसरे के समांतर हैं । 5.8 मी लंबाई वाली सीढ़ी का सिरा रास्ते पर हो और उसका ऊपरी सिरा घर के 4 मीटर ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचता है । उसी स्थान से सीढ़ी को रास्ते के दूसरी ओर झुकाने पर उसका ऊपरी सिरा दूसरे घर के 4.2 मीटर ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँचता हो तो रास्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

पायथागोरस के प्रमेय का उपयोजन

पायथागोरस के प्रमेय में समकोण त्रिभुज का कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में परस्पर संबंध अर्थात समकोण की सम्मुख भुजा और अन्य दो भुजाओं मे संबंध बताया गया है ।

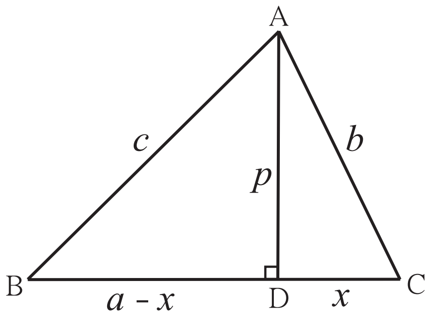
त्रिभुज में न्यूनकोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध, इसी प्रकार अधिक कोण की सम्मुख भुजा का अन्य दो भुजाओं से संबंध पायथागोरस के प्रमेय से निश्चित किया जाता है । यह संबंध निम्नलिखित उदाहरणों से समझिए ।

उदा.(1) Δ ABC में, $\angle$ C न्यूनकोण है, रेख AD $\perp$ रेख BC तो सिद्ध कीजिए कि :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

दी गई आकृति में, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ माना ।

$\therefore BD = a - x$



आकृति 2.23

Δ ADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$c^2 = (a-x)^2 + \boxed{\quad}$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \boxed{\quad}$ .... (I)

Δ ADC में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार

$b^2 = p^2 + \boxed{\quad}$

$p^2 = b^2 - \boxed{\quad}$ .... (II)

(II) में p^2 का मान, (I) में रखनेपर,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

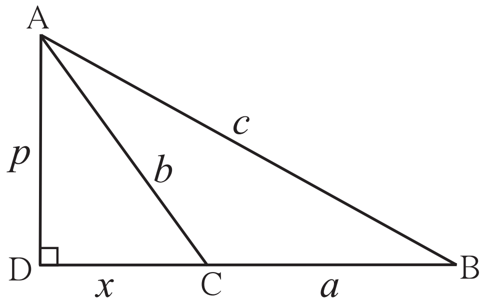
उदा.(2) Δ ABC में, $\angle$ ACB अधिक कोण है, रेख AD $\perp$ रेख BC, तो सिद्ध कीजिए कि :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

मान लीजिए $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

$BC = a$, $DC = x$ (माना)

$DB = a + x$



आकृति 2.24

Δ ADB में, पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

इसी प्रकार Δ ADC में,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} \; (II)$$

$\therefore$ (I) में (II) के p^2 का मान रखनेपर,

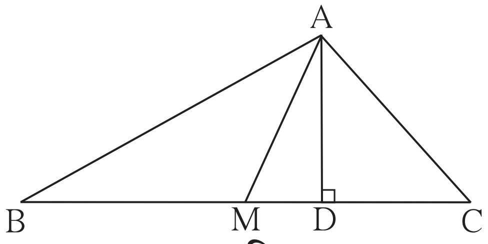
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

अपोलोनियस का प्रमेय (Appollonius' Theorem)

यदि Δ ABC में, बिंदु M भुजा BC का मध्य बिंदु हो, तो $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृति 2.25

दत्त : Δ ABC में बिंदु M भुजा BC का मध्यबिंदु है ।

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख AD $\perp$ रेख BC खींचते हैं ।

उपपत्ति : यदि रेख AM रेख BC पर लंब नहीं है, तो $\angle$ AMB और $\angle$ AMC में से एक अधिक कोण और दूसरा न्यूनकोण होता है ।

आकृति में $\angle$ AMB अधिक कोण और $\angle$ AMC न्यूनकोण है ।

उपर्युक्त उदाहरण (1) तथा उदाहरण (2) से,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

और $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) तथा (II) को जोड़नेपर,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

यदि रेख AM $\perp$ भुजा BC तो इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।

इस उदाहरण के आधारपर त्रिभुज की भुजा और माध्यिका में परस्पर संबंध समझा जा सकता है ।

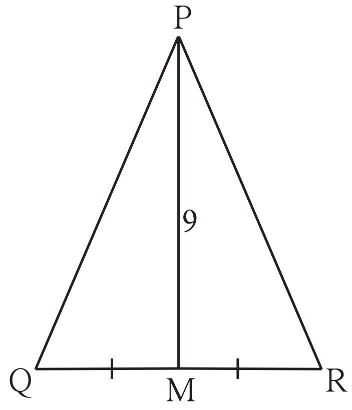
इसी को 'अपोलोनियस का प्रमेय' कहते हैं ।

हल किए हुए उदाहरण

उदा.(1) आकृति 2.26 Δ PQR में, रेख PM माध्यिका है PM = 9 और $PQ^2 + PR^2 = 290$, तो QR ज्ञात कीजिए ।

हल : Δ PQR में, रेख PM माध्यिका है ।

बिंदु M रेख QR का मध्यबिंदु है ।



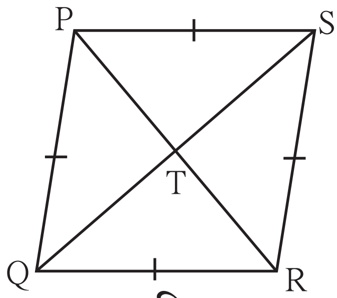
आकृति 2.26

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (अपोलोनियस के प्रमेयानुसार)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$
$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$
$$290 = 162 + 2QM^2$$
$$2QM^2 = 290 - 162$$
$$2QM^2 = 128$$
$$QM^2 = 64$$
$$QM = 8$$
$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$
$$= 2 \times 8$$
$$= 16$$

उदा.(2) सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज के विकर्णों का योगफल उसकी भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।



आकृति 2.27

दत्त : □ PQRS एक समचतुर्भुज है जिसमें विकर्ण PR और विकर्ण SQ परस्पर बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

साध्य : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

उपपत्ति : समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ।

$\therefore$ अपोलोनियस के प्रमेयानुसार,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) को जोड़ने पर,

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... (RT = PT)

$$= 4PT^2 + 4QT^2$$
$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$
$$= PR^2 + QS^2$$

(इस उदाहरण को हम पायथागोरस के प्रमेय की सहायता से भी हल कर सकते हैं ।)

प्रश्नसंग्रह 2.2

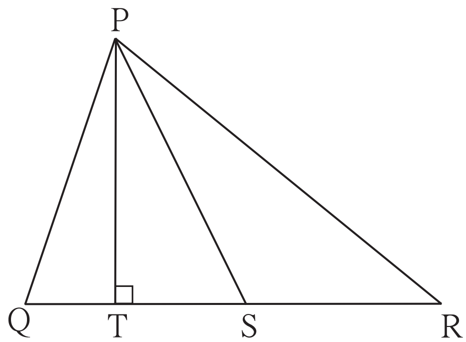
1. Δ PQR में, बिंदु S यह भुजा QR का मध्यबिंदु है, यदि PQ = 11, PR = 17, PS = 13 हो तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

2. Δ ABC में, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तो बिंदु C से भुजा AB पर खींची गई माध्यिका की लंबाई कितनी होगी ?

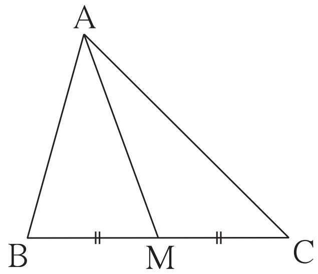
3. आकृति 2.28 में रेख PS यह Δ PQR की माध्यिका है और PT $\perp$ QR तो सिद्ध कीजिए कि,

(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



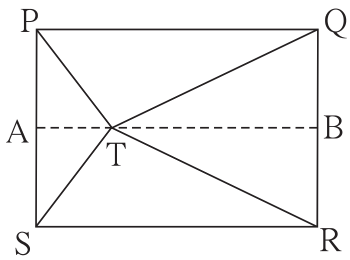
आकृति 2.28



आकृति 2.29

4. आकृति 2.29 में, Δ ABC में बिंदु M यह भुजा BC का मध्यबिंदु है, यदि $AB^2 + AC^2 = 290$ सेमी, AM = 8 सेमी, तो BC ज्ञात कीजिए ।

5★. आकृति 2.30 में दर्शाएनुसार बिंदु T यह आयत PQRS के अंतर्भाग में स्थित है । तो सिद्ध कीजिए कि, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृति में दर्शाएअनुसार रेख AB || भुजा SR ऐसा खींचिए कि A–T–B)



आकृति 2.30

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. निम्नलिखित बहुवैकल्पिक प्रश्नों के दिए गए उत्तरों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) निम्नलिखित में से कौन–सा पायथागोरस का त्रिक् है ?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं के वर्गों का योगफल 169 हो तो उसके कर्ण की लंबाई कितनी होगी ?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) निम्नलिखित में से कौन-से दिनांक की संख्या पायथागोरस का त्रिक् हैं?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) a, b, c भुजावाले त्रिभुज में यदि $a^2 + b^2 = c^2$ हो तो वह त्रिभुज किस प्रकार का होगा?

(A) अधिक कोण त्रिभुज (B) न्यूनकोण त्रिभुज (C) समकोण त्रिभुज (D)समबाहु त्रिभुज

(5) किसी चतुर्भुज का विकर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी हो तो उसकी परिमिति .... होगी ।

(A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

(6) किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर खींचे गए शीर्षलंब से कर्ण के 4 सेमी तथा 9 सेमी लंबाईवाले दो भाग होते हैं, तो उस शीर्षलंब की लंबाई कितनी होगी?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

(7) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजा की लंबाई 24 सेमी तथा 18 सेमी हों तो उसके कर्ण की लंबाई .... होगी ।

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

(8) Δ ABC में, यदि AB = $6\sqrt{3}$ सेमी, AC = 12 सेमी और BC = 6 सेमी हो, तो $\angle$ A का माप कितना होगा?

(A) $30°$ (B) $60°$ (C) $90°$ (D) $45°$

2. निम्नलिखित उपप्रश्नों को हल कीजिए ।

(1) किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

(2) किसी त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई क्रमश: 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी हो तो क्या वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा ? कारण सहित लिखिए ।

(3) किसी आयत की भुजाएँ क्रमश: 11 सेमी तथा 60 सेमी हों तो उसके विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

(4) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमश: 9 सेमी तथा 12 सेमी हों तो उस त्रिभुज के कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

(5) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के भुजा की लंबाई x हो, तो उसके कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

(6) Δ PQR में; PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; तो क्या Δ PQR समकोण त्रिभुज है ? यदि है, तो उसका कौन-सा कोण समकोण होगा?

3. Δ RST में, $\angle$ S = $90°$, $\angle$ T = $30°$, RT = 12 सेमी हो तो RS तथा ST का मान ज्ञात कीजिए ।

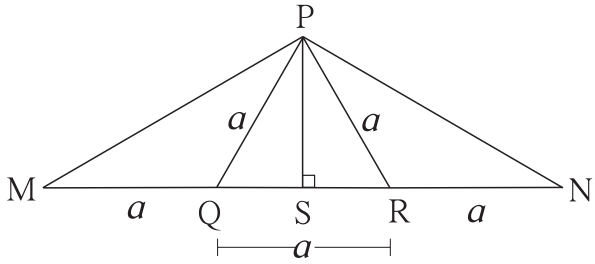
4. किसी आयत का क्षेत्रफल 192 वर्ग सेमी तथा उसकी लंबाई 16 सेमी हो, तो उस आयत के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

5★. किसी समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $\sqrt{3}$ सेमी हो, तो उस त्रिभुज के भुजा की लंबाई तथा उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए ।

6. Δ ABC में रेख AP माध्यिका है । यदि BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ तो AP ज्ञात कीजिए ।

7★ समकोण त्रिभुज ABC में आधार BC पर बिंदु P इस प्रकार है कि PC = $\frac{1}{3}$ BC, यदि AB = 6 सेमी तो AP ज्ञात कीजिए ।

8. आकृति 2.31 में M–Q–R–N दी गई जानकारी के आधार पर सिद्ध कीजिए कि : PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

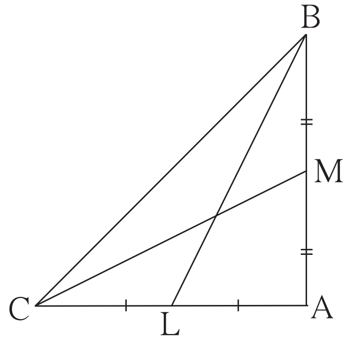


आकृति 2.31

9. सिद्ध कीजिए कि, समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योगफल उस चतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है ।

10. सीमा और नेहा ने एक ही स्थान से पूर्व और उत्तर दिशा में एक ही गति से चलना प्रारंभ किया, दो घंटे पश्चात उनके बीच की दूरी $15\sqrt{2}$ किमी हो तो उनकी प्रतिघंटा गति ज्ञात कीजिए ।

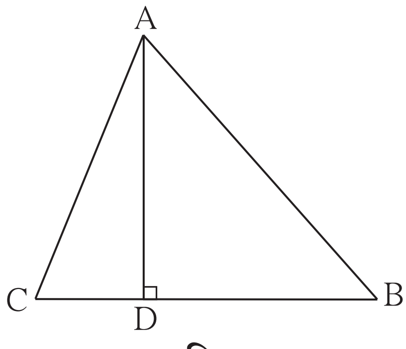
11★. Δ ABC में $\angle$ BAC = 90°, रेख BL तथा रेख CM, यह Δ ABC की माध्यिकाएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि, $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



आकृति 2.32

12. किसी समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं के वर्गों का योगफल 130 वर्ग सेमी हो तथा उसके एक विकर्ण की लंबाई 14 सेमी हो तो उसके दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

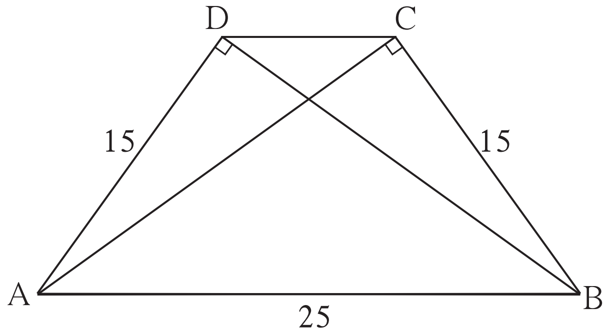
13. Δ ABC में रेख AD $\perp$ रेख BC और DB = 3CD, तो सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



आकृति 2.33

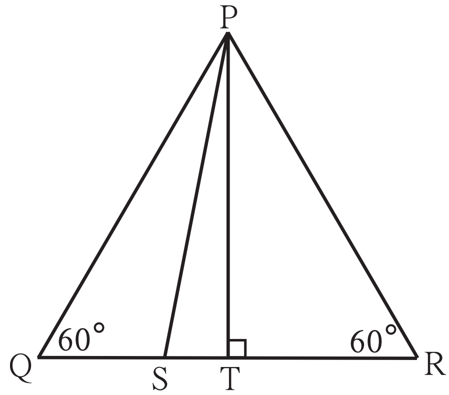
14★. किसी समद्विबाहु त्रिभुज में सर्वांगसम भुजाओं की लंबाई 13 सेमी तथा आधार की लंबाई 10 सेमी हो तो उस त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगमन बिंदु से आधार के सम्मुख शीर्ष बिंदु तक की दूरी ज्ञात कीजिए ।

15. समलंब चतुर्भुज ABCD में,
रेख AB || रेख DC
रेख BD $\perp$ रेख AD,
रेख AC $\perp$ रेख BC,
यदि AD = 15, BC = 15 और AB = 25
हो तो A($\square$ ABCD) का मान कितना होगा ?



आकृति 2.34

16★. संलग्न आकृति में Δ PQR एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें बिंदु S यह रेख QR पर इस प्रकार है कि,
$QS = \frac{1}{3} QR$ तो सिद्ध कीजिए कि;
$9 PS^2 = 7 PQ^2$



आकृति 2.35

17★. Δ PQR में रेख PM यह माध्यिका है । यदि PQ = 40, PR = 42 और PM = 29, तो QR की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

18. Δ ABC में रेख AM यह माध्यिका है । यदि AB = 22, AC = 34, BC = 24, तो AM की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

ICT Tools or Links

इंटरनेट से 'Story on the life of Pythagoras' की जानकारी प्राप्त कर के Slide show तैयार कीजिए ।

PFE7LI

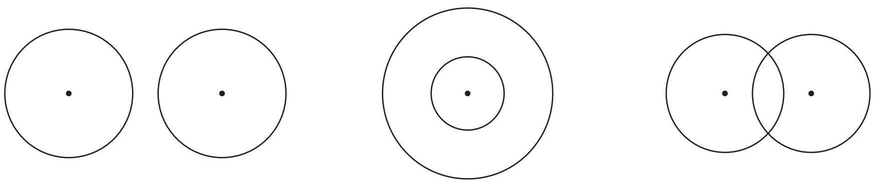
3 वृत्त

आओ सीखें

- एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त
- स्पर्शवृत्त
- अंतर्लिखित कोण तथा अंतःखंडित चाप
- स्पर्शरेखा छेदनरेखा कोण प्रमेय
- वृत्त की छेदन रेखा तथा स्पर्शरेखा
- वृत्तचाप
- चक्रीय चतुर्भुज
- जीवाओं के प्रतिच्छेदन का प्रमेय

थोड़ा याद करें

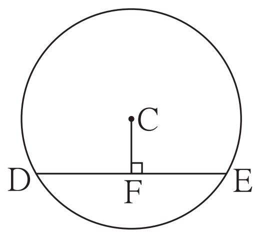
वृत्त के केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतःभाग, बहिर्भाग आदि नामों से आप भलीभाँति परिचित हैं । सर्वांगसम वृत्त, एक केंद्रीय वृत्त तथा परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्तों को याद कीजिए ।



सर्वांगसम वृत्त   एक केंद्रीय वृत्त   परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले वृत्त

नौवीं कक्षा में अध्ययन किए हुए जीवा के गुणधर्म को निम्नलिखित कृति की सहायता से याद कीजिए ।

कृति I : संलग्न आकृति में C केंद्रवाले वृत्त में रेख DE एक जीवा है । रेख CF $\perp$ जीवा DE, यदि वृत्त का व्यास 20 सेमी और DE = 16 सेमी हो, तो CF = कितना ?



आकृति 3.1

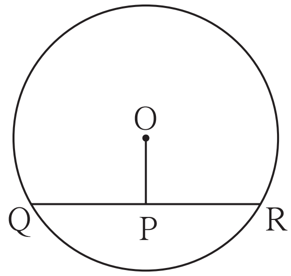
इस प्रश्न को हल करने के लिए उपयोग में आने वाले प्रमेय तथा उसके गुणधर्म को याद करके लिखिए ।

(1) वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब .... ____________________

(2) ____

(3) ____

इन गुणधर्मों का उपयोग कर प्रश्न हल कीजिए।



आकृति 3.2

कृति II : संलग्न आकृति में O केंद्रवाले वृत्त की रेख QR एक जीवा है। बिंदु P जीवा QR का मध्यबिंदु है। यदि QR = 24, OP = 10 तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

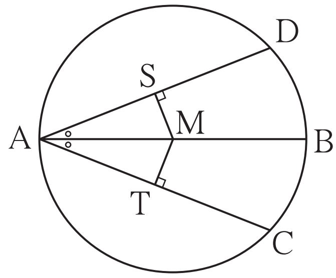
यह प्रश्न हल करने के लिए उपयुक्त प्रमेय लिखिए ।

(1) ____________________

(2) ____________________

इन प्रमेयों का उपयोग करके उदाहरण हल कीजिए ।

कृति III : आकृति में वृत्त का केंद्र M तथा
रेख AB व्यास है ।
रेख MS ⊥ जीवा AD
रेख MT ⊥ जीवा AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$
तो सिद्‌ध कीजिए; जीवा AD ≅ जीवा AC



आकृति 3.3

यह प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित में से किस प्रमेय का उपयोग करेंगे ?

(1) वृत्त की दो जीवाएँ केंद्र से समान दूरी पर हों तो वे परस्पर सर्वांगसम होती हैं ।

(2) एक ही वृत्त की सर्वांगसम जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर होती हैं ।

इनके आलावा त्रिभुजों की सर्वांगसमता की निम्नलिखित में से कौन-सी कसौटी उपयोगी होगी ?

(1) भुकोभु, (2) कोभुको, (3) भुभुभु, (4) कोकोभु, (5) कर्ण-भुजा

उचित कसौटी और प्रमेय का प्रयोग करके उपपत्ति लिखिए ।

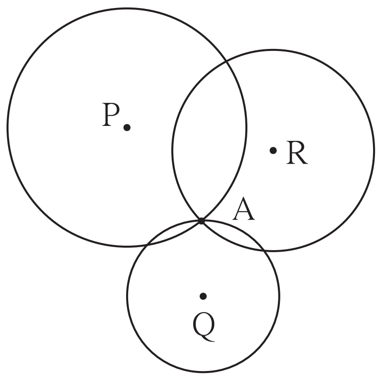
आओ जानें

एक, दो तथा तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त

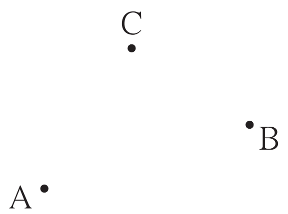
संलग्न आकृति में,किसी एक प्रतल में बिंदु A दर्शाया गया है । केंद्रबिंदु P, Q, R वाले तीन वृत्त बिंदु A से होकर जाते हैं । बिंदु A से जाने वाले ऐसे कितने वृत्त हो सकते हैं ?

यदि आपका उत्तर 'कितने भी' या 'असंख्य' है तो वह सही है ।

एक ही बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त हो सकते हैं ।



आकृति 3.4



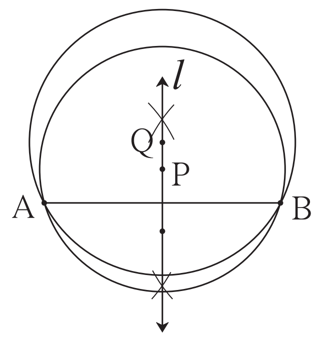
आकृति 3.5

संलग्न आकृति में A और B इन दो भिन्न बिंदुओं से होकर जानेवाले कितने वृत्त होंगे ?

A, B, C इन तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले कितने वृत्त होंगे ?

आइए देखें आगे दी गई कृतियों से कोई उत्तर प्राप्त होता है क्या ?

कृति I : बिंदु A और बिंदु B को जोड़ने वाली रेख AB खींचिए। इस रेखाखंड की लंब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। रेखा l पर बिंदु P को केंद्र तथा PA को त्रिज्या मान कर वृत्त खींचिए । देखिए यह वृत्त बिंदु B से भी होकर गुजरता है । इसका कारण बताइए । (लंब समद्विभाजक रेखा का गुणधर्म याद कीजिए ।)

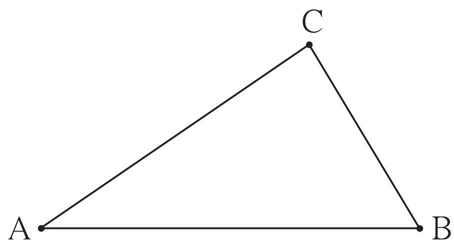


आकृति 3.6

रेखा l पर Q एक और बिंदु लेकर केंद्र Q और त्रिज्या QA लेकर खींचा गया वृत्त भी क्या बिंदु B से होकर जाएगा ? चिंतन कीजिए ।

बिंदु A और बिंदु B से होकर जाने वाले और कितने वृत्त खींचे जा सकेंगे ? उनके केंद्र बिंदु कहाँ होंगे ?

कृति II : नैकरेखीय (अरेखीय) बिंदु A, B, C लीजिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त खींचिए। इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला एक वृत्त और खींचा जा सकेगा क्या ? चिंतन कीजिए ।



आकृति 3.7

कृति III : एकरेखीय बिंदु D, E, F लीजिए । इन तीनों बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त खींचने का प्रयास कीजिए । यदि वृत्त नहीं खींचा जा सकता तो क्यों ? इसके बारे में विचार कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

(1) किसी एक बिंदु से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त खींचे जा सकते हैं ।

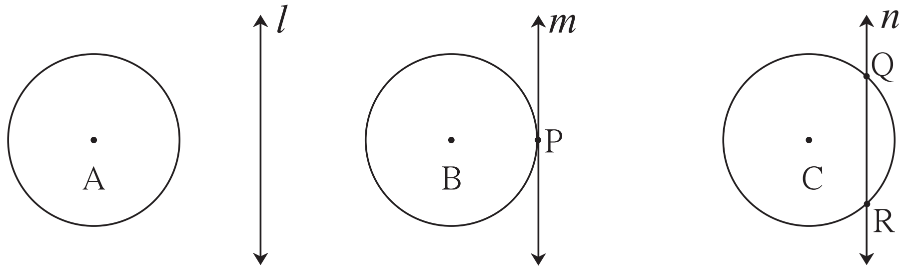
(2) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाले असंख्य वृत्त होते हैं ।

(3) तीन नैकरेखीय (अरैखिक) बिंदुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है ।

(4) तीन एकरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाला एक भी वृत्त नहीं खींचा जा सकता ।

आओ जानें

वृत्त की छेदन रेखा और स्पर्शरेखा



आकृति 3.8

आकृति में रेखा l एवं वृत्त के बीच कोई सामान्य बिंदु नहीं है ।

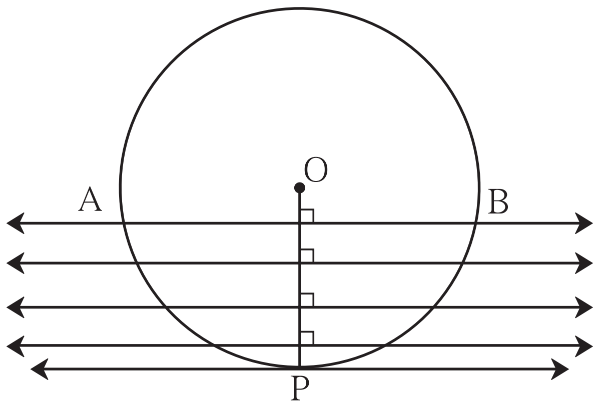
आकृति में रेखा m एवं वृत्त के बीच बिंदु P एक सामान्य बिंदु है। यहाँ m वृत्त की स्पर्श रेखा है एवं बिंदु P यह स्पर्श बिंदु है ।

आकृति में रेखा n एवं वृत्त में दो समान्य बिंदु हैं। Q एवं R रेखा व वृत्त के प्रतिच्छेदन बिंदु हैं। रेखा n को वृत्त की छेदन रेखा कहते हैं ।

वृत्त के स्पर्श रेखा का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म एक कृति से समझिए ।

कृति :

O केंद्रवाला एक बड़ा वृत्त खींचिए। उस वृत्त की एक त्रिज्या रेख OP खींचिए । रेखा और वृत्त के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को A और B नाम दीजिए । कल्पना कीजिए कि रेखा AB बिंदु O से बिंदु P की ओर इसप्रकार सरक रही है कि उसकी पहले की स्थिति नयी स्थिति के समांतर रहेगी । अर्थात रेखा AB और त्रिज्या के बीच का कोण हमेशा समकोण रहेगा ।



आकृति 3.9

ऐसा करने पर बिंदु A और B वृत्त पर परस्पर नजदीक आने लगेंगे । अंत में वे बिंदु P में समाविष्ट हो जाते हैं । इस स्थिति में रेखा AB वृत्त की स्पर्शरेखा होगी परंतु त्रिज्या OP और रेखा AB के बीच का कोण सदैव समकोण ही रहेगा ।

इससे हमें ज्ञात होता है कि वृत्त के किसी भी बिंदु से जाने वाली स्पर्शरेखा उस बिंदु को मिलाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है । इस गुणधर्म को 'स्पर्शरेखा त्रिज्या प्रमेय' कहते हैं ।

स्पर्शरेखा-त्रिज्या प्रमेय (Tangent theorem)

प्रमेय : **वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जानेवाली स्पर्शरेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़नेवाली त्रिज्या पर लंब होती है ।**

अधिक जानकारी हेतू :

दत्त : O केंद्रवाले वृत्त को, एक रेखा l, बिंदु A पर स्पर्श करती है । रेख OA वृत्त की त्रिज्या है ।

साध्य : रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA

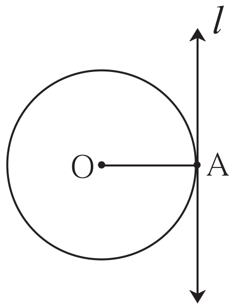
उपपत्ति : मानो रेखा l रेख OA पर लंब नहीं है ।

मानो बिंदु O से रेखा l पर, OB लंब खींचा गया ।

स्वाभाविक रूप से बिंदु B, बिंदु A से भिन्न होना चाहिए । (आकृति 3.11 देखिए)

रेखा l पर बिंदु C इस प्रकार लीजिए कि

A-B-C और BA = BC



आकृति 3.10

अब, ΔOBC और ΔOBA में,

रेख BC $\cong$ रेख BA .... (रचना)

$\angle$OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (प्रत्येक समकोण)

रेख OB $\cong$ रेख OB

$\therefore$ ΔOBC $\cong$ ΔOBA .... (भुकोभु कसौटी)

$\therefore$ OC = OA

परंतु रेख OA यह त्रिज्या है, अर्थात रेख OC भी त्रिज्या होगी ।

$\therefore$ बिंदु C वृत्त पर स्थित है ।

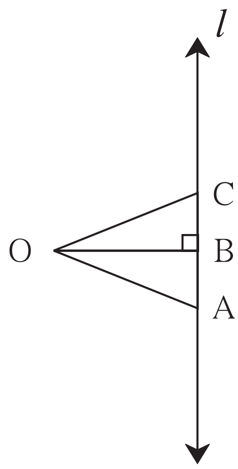
अर्थात रेखा l, वृत्त को A और C दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेगी । यह कथन दत्त से असंगत है

क्योंकि रेखा l स्पर्शरेखा है .... दत्त

अर्थात रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है ।

$\therefore$ रेखा l त्रिज्या OA पर लंब नहीं है; ऐसा मानना असत्य है ।

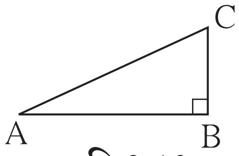
$\therefore$ रेखा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृति 3.11

थोड़ा याद करें

समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है, यह गुणधर्म पढ़े गए किस प्रमेय का उपयोग कर सिद्‌ध कर सकते हैं ?

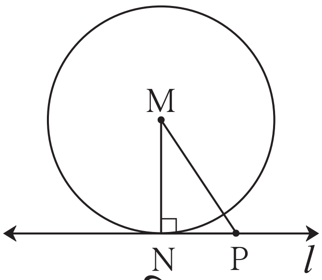


आकृति 3.12

आओ जानें

स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम (Converse of Tangent Theorem)

वृत्त की त्रिज्या के बाह्य सिरे से होकर जाने वाली तथा उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।



आकृति 3.13

दत्त : रेख MN, M केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या है । बिंदु N से जाने वाली रेखा l, त्रिज्या MN पर लंब है ।

साध्य : रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है ।

उपपत्ति : रेखा l पर N के अतिरिक्त एक बिंदु P लीजिए । रेख MP खींचिए ।

अब, Δ MNP में $\angle$ N समकोण है ।

$\therefore$ रेख MP विकर्ण है ।

$\therefore$ रेख MP > रेख MN

$\therefore$ बिंदु P वृत्त पर हो यह संभव नहीं ।

अर्थात रेखा l पर N के अतिरिक्त अन्य कोई भी बिंदु वृत्त पर नहीं है ।

$\therefore$ रेखा l वृत्त को एक ही बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करती है ।

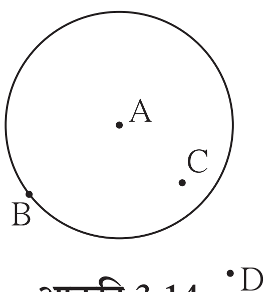
$\therefore$ रेखा l उस वृत्त की स्पर्श रेखा है ।

आओ चर्चा करें

A केंद्रवाले किसी वृत्त पर कोई बिंदु B स्थित है । इस वृत्त के बिंदु B से होकर जानेवाली स्पर्श रेखा खींचनी है ।

B बिंदु से जानेवाली असंख्य रेखाएँ हो सकती हैं । उनमें से कौन-सी रेखा इस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी ? उसे कैसे खींचा जा सकता है ?

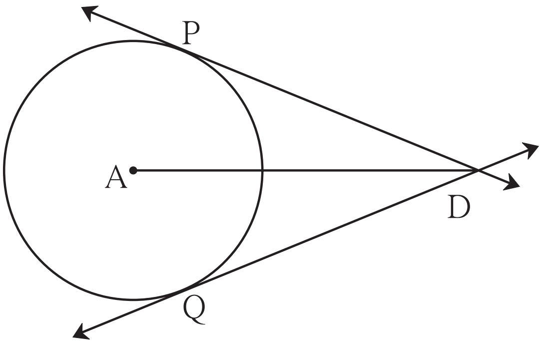
क्या बिंदु B से जाने वाली एक से अधिक स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं ?



आकृति 3.14

क्या वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु C से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?

क्या वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु D से उस वृत्त पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है? यदि हाँ तो कितनी स्पर्श रेखाएँ होंगी?



आकृति 3.15

चर्चा से आपको ध्यान में आया होगा कि आकृति में दर्शाए अनुसार वृत्त के बाह्यभाग से उस वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं ।

संलग्न आकृति में A केंद्रवाले वृत्त पर रेखा DP और रेखा DQ दो स्पर्शरेखाएँ, क्रमशः बिंदु P और बिंदु Q पर स्पर्श करती हैं ।

रेख DP और रेख DQ को स्पर्शरेखाखंड कहते हैं ।

स्पर्शरेखाखंड का प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : **वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं ।**

साथ की आकृति के आधार पर दत्त और साध्य निश्चित कीजिए ।

त्रिज्या AP और AQ खींचकर इस प्रमेय की उपपत्ति नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को भरकर पूर्ण कीजिए ।

उपपत्ति : Δ PAD और Δ QAD में,

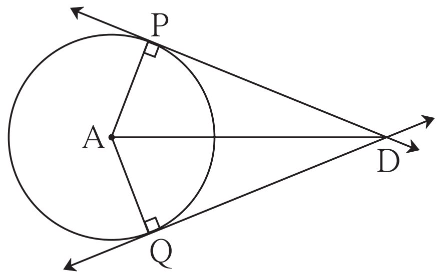
भुजा PA $\cong$ ________ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

भुजा AD $\cong$ भुजा AD ________

$\angle$ APD = $\angle$ AQD = 90° ......(स्पर्श रेखा का प्रमेय)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________

$\therefore$ भुजा DP $\cong$ भुजा DQ ________

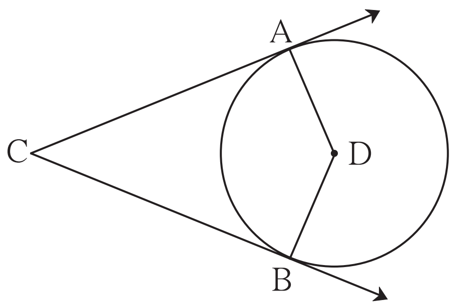


आकृति 3.16

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) दी गई आकृति में, D केंद्रवाला वृत्त $\angle$ ACB के भुजाओं को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करता है । यदि $\angle ACB = 52^\circ$, तो $\angle$ ADB का माप ज्ञात कीजिए ।

हल : चतुर्भुज के चारों कोणों के मापों का योगफल 360° होता है ।



आकृति 3.17

$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

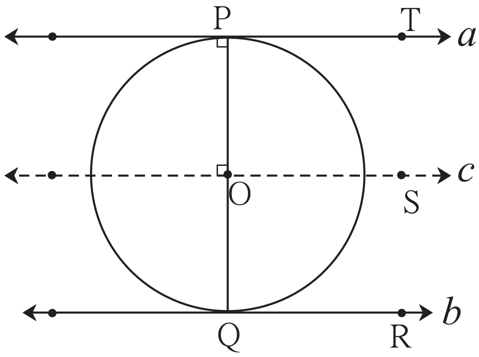
$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

उदा. (2) रेखा a और रेखा b, O केंद्रवाले वृत्त की समांतर स्पर्श रेखाएँ वृत्त को क्रमशः बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती हैं, सिद्‌ध कीजिए कि रेख PQ उस वृत्त का व्यास है ।

उपपत्ति : बिंदु O से रेखा a के समांतर रेखा c खींचिए ।



आकृति 3.18

आकृति में दर्शाएनुसार रेखा a, c, b पर क्रमशः बिंदु T, S, R लीजिए ।

त्रिज्या OP और त्रिज्या OQ खींचिए ।

अब, $\angle OPT = 90^\circ$ ..... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore$ $\angle SOP = 90^\circ$..... (अंतःकोण गुणधर्म) .... (I)

अब, रेखा $a \parallel$ रेखा c ..... (रचना से)

रेखा $a \parallel$ रेखा b ..... (दत्त)

रेखा $b \parallel$ रेखा c ..... (स्पर्श रेखा प्रमेय)

अब $\angle OQR = 90^\circ$.... (स्पर्श रेखा त्रिज्या प्रमेय)

$\therefore$ $\angle SOQ = 90^\circ$..... (अंतःकोण गुणधर्म) .... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) से,

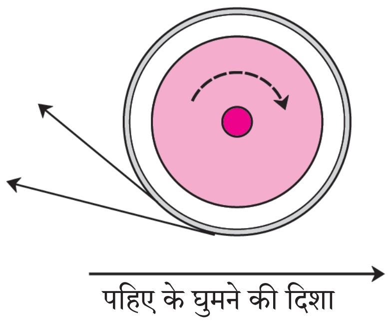
$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ किरण OP और किरण OQ विपरीत किरण हैं ।

$\therefore$ बिंदु P, O, Q एकरेखीय हैं ।

$\therefore$ रेख PQ वृत्त का व्यास है ।

बरसात में रास्ते पर जमा पानी में मोटर साइकिल जाते समय उसके पिछले पहिए से उड़ने वाले पानी की धारा को आपने देखा होगा । आप के ध्यान में आया होगा कि वे धाराएँ वृत्त की स्पर्श रेखा जैसे दिखाई देती हैं । वे धाराएँ ऐसे ही क्यों दिखाई देती है ? उसकी जानकारी आप अपने विज्ञान अध्यापक से लीजिए ।



घूमते हुए भूचक्र से निकलने वाली चिंगारियाँ उसी प्रकार चाकू को धार देते समय निकलने वाली चिंगारियों का निरीक्षण कीजिए । क्या वह स्पर्श रेखा जैसी दिखाई देती है ?

इसे ध्यान में रखें

(1) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय : वृत्त के किसी भी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्श रेखा उस बिंदु को केंद्र से जोड़ने वाली त्रिज्या पर लंब होती है ।

(2) स्पर्श रेखा – त्रिज्या प्रमेय का विलोम : वृत्त की त्रिज्या के बाह्‌य सिरे से होकर जाने वाली और उस त्रिज्या पर लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।

(3) वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से उस वृत्त पर खींचे गए स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.1

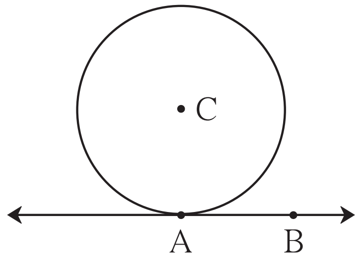
1. संलग्न आकृति में, C केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है । रेखा AB वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करता है । इस जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(1) $\angle$CAB का माप कितने अंश है ? क्यों ?

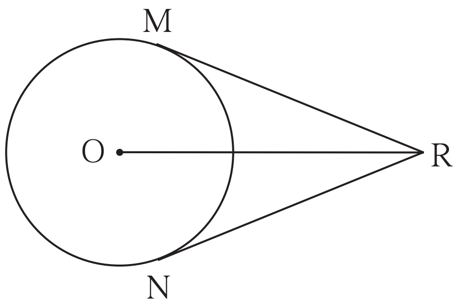
(2) बिंदु C, रेखा AB से कितनी दूरी पर है ? क्यों ?

(3) यदि d(A,B)= 6 सेमी, तो d(B,C) ज्ञात कीजिए ।

(4) $\angle$ABC का माप कितने अंश है ? क्यों ?



आकृति 3.19



आकृति 3.20

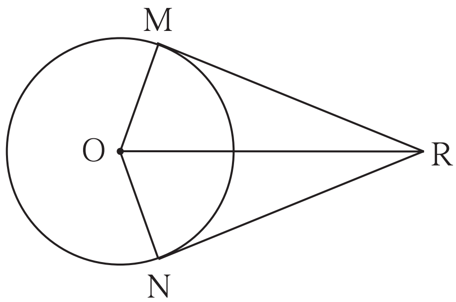
2. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु R से खींचे गए RM और RN स्पर्श रेखाखंड वृत्त को बिंदु M और N पर स्पर्श करते हैं ।

यदि l(O,R)= 10 सेमी तथा वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी हो तो –

(1) प्रत्येक स्पर्श रेखाखंड की लंबाई कितनी होगी ?

(2) $\angle$ MRO का माप कितना होगा ? (3) $\angle$ MRN का माप कितना होगा ?

3. रेख RM और रेख RN, O केंद्रवाले वृत्त के स्पर्श रेखाखंड हैं । सिद्ध कीजिए की रेख OR, $\angle$MRN और $\angle$MON दोनों कोणों का समद्विभाजक है ।



आकृति 3.21

4. 4.5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर हैं । उन स्पर्श रेखाओं के बीच की दूरी कितनी होगी कारण सहित लिखिए ।

ICT Tools or Links

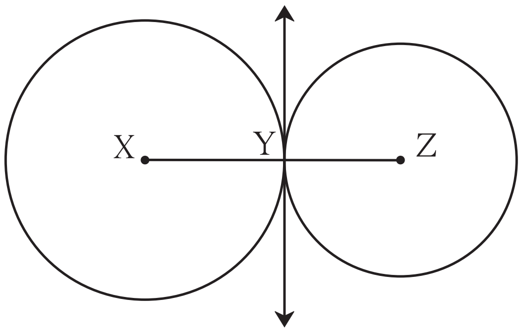
संगणक पर जिओजेब्रा इस सॉफ्टवेअर की सहायता से वृत्त तथा वृत्त के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा खींचकर स्पर्श रेखाखंड सर्वांगसम है इसकी जाँच कीजिए ।

आओ जानें

स्पर्श वृत्त (Touching circle)

कृति I :

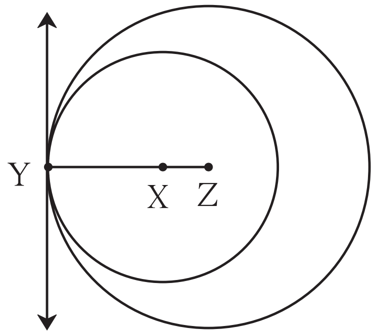
आकृति 3.22 में दर्शाए अनुसार X-Y-Z एकरैखिक बिंदु लीजिए । केंद्र X तथा त्रिज्या XY लेकर वृत्त खींचिए । केंद्र Z तथा त्रिज्या YZ लेकर एक दूसरा वृत्त खींचिए । यह दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं । बिंदु Y से रेख XZ पर लंब रेखा खींचिए । यह ध्यान रहे कि यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।



आकृति 3.22

कृति II :

आकृति 3.23 में दर्शाए अनुसार Y-X-Z एकरैखिक बिंदु खींचिए ।
केंद्र Z और ZY त्रिज्या लेकर वृत्त खींचिए ।
केंद्र X और XY त्रिज्या लेकर वृत्त खींचिए ।
दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही सामान्य बिंदु Y पर स्पर्श करते हैं ।
बिंदु Y से रेख YZ पर लंब रेखा खींचिए । ध्यान रहे यह रेखा दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।



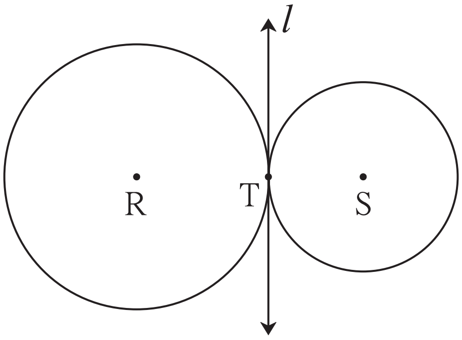
आकृति 3.23

उपर्युक्त कृतियों में आपके ध्यान में आया होगा कि दोनों आकृतियों में वृत्त एक ही प्रतल में हैं और एक दूसरे को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हैं । ऐसे वृत्तों को एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्त या **स्पर्श वृत्त** कहते हैं ।

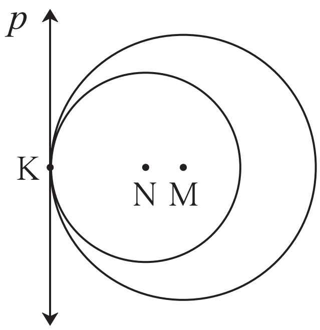
स्पर्श वृत्तों की परिभाषा आगे दिए अनुसार की जाती है ।

किसी प्रतल में स्थित दो वृत्त उसी प्रतल में स्थित एक रेखा को एक ही बिंदु पर स्पर्श करते हों तो उन्हें स्पर्श वृत्त कहते हैं । वह रेखा उन दोनों वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा होती है ।

दोनों वृत्त तथा रेखा पर स्थित सामान्य बिंदु को **सामान्य स्पर्श बिंदु** कहते हैं ।



आकृति 3.24



आकृति 3.25

आकृति 3.24 में केंद्र R तथा केंद्र S वाले वृत्त रेख l को एक ही बिंदु T पर स्पर्श करते हैं । अर्थात उन दोनों स्पर्श वृत्तों की रेखा l सामान्य स्पर्श रेखा है । इस आकृति में वृत्त **बाह्यस्पर्शी** हैं ।

आकृति 3.25 में वृत्त **अंत:स्पर्शी** हैं तथा रेख p उनकी सामान्य स्पर्श रेखा है ।

थोड़ा सोचें

(1) आकृति 3.24 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को बाह्यस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं ?

(2) आकृति 3.25 में दिए गए वृत्तों के जैसे परस्पर स्पर्श करने वाले वृत्तों को अंतःस्पर्शी वृत्त क्यों कहते हैं ?

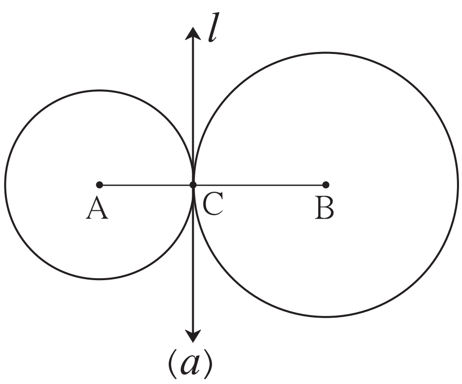
(3) नीचे दी गई आकृति 3.26 में, केंद्र A तथा B वाले वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 3 सेमी तथा 4 सेमी हो तो –

(i) आकृति 3.26 (a) में d(A,B) कितना होगा ?

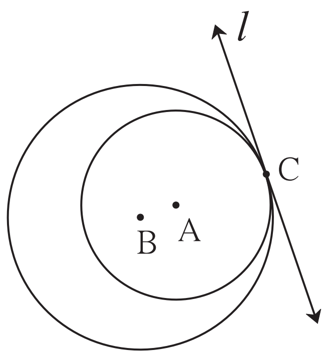
(ii) आकृति 3.26 (b) में d(A,B) कितना होगा ?

स्पर्श वृत्त प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : यदि दो स्पर्श वृत्त हैं तो सामान्य बिंदु उन दो वृत्तों के केंद्रों को मिलने वाली रेखा पर होता है ।



(a)



(b)

आकृति 3.26

दत्त : बिंदु A तथा B केंद्र वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु C है ।

साध्य : C बिंदु रेखा AB पर स्थित है ।

उपपत्ति : माना, रेखा l स्पर्श वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है ।

रेखा $l \perp$ रेख AC, रेखा $l \perp$ रेख BC. $\therefore$ रेख AC तथा रेख BC रेखा l पर लंब हैं।

बिंदु C से रेखा l पर एक ही लंब रेखा खींची जा सकती है। $\therefore$ C, A, B एकरेखीय हैं।

इसे ध्यान में रखें

(1) परस्पर एक दूसरे को स्पर्श करने वाले वृत्तों का स्पर्श बिंदु उन वृत्तों के केंद्र बिंदु को जोड़नेवाले रेखा पर होता है ।

(2) बाह्यस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है ।

(3) अंतःस्पर्शी वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अंतर के बराबर होती है ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. परस्पर अंतःस्पर्श करने वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 3.5 सेमी तथा 4.8 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

2. बाह्यस्पर्शी दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5.5 सेमी तथा 4.2 सेमी हों तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

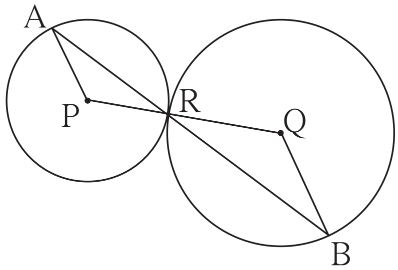
3. 4 सेमी और 2.8 सेमी त्रिज्या वाले (1) बाह्यस्पर्शी (2) अंतःस्पर्शी वृत्त बनाइए ।

4. आकृति 3.27 में P तथा Q केंद्र वाले वृत्त एकदूसरे को R बिंदु पर स्पर्श करते हैं। बिंदु R से जानेवाली रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हो तो –

(1) सिद्ध कीजिए रेख AP || रेख BQ

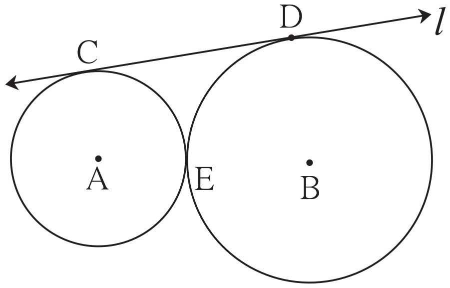
(2) सिद्ध कीजिए $\Delta APR \sim \Delta RQB$

(3) यदि $\angle PAR$ का माप 35° हो, तो $\angle RQB$ का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.27

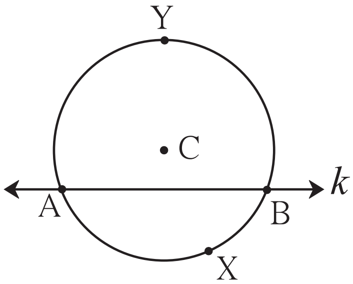
5. आकृति 3.28 में A तथा B केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु E पर स्पर्श करते हैं । उनकी सामान्य स्पर्शरेखा l उन्हें क्रमशः C तथा D बिंदुओं पर स्पर्श करती है। यदि वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 4 सेमी तथा 6 सेमी हो तो रेख CD की लंबाई कितनी होगी ?



आकृति 3.28

थोड़ा याद करें

वृत्त चाप (Arc of a circle)



आकृति 3.29

वृत्त की छेदन रेखा द्वारा वृत्त दो भागों में विभाजित होता है । इनमें से कोई भी एक भाग और वृत्त की छेदन रेखा के वृत्त पर स्थित बिंदुओं को मिलाकर बनने वाली आकृति को **वृत्त चाप** कहते हैं ।

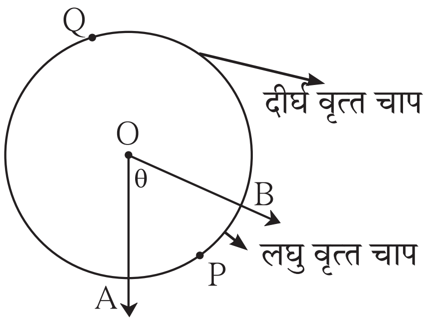
वृत्त और छेदन रेखा के छेदन बिंदुओं को चाप के अंत्यबिंदु अथवा चाप के सिरे कहते हैं ।

आकृति 3.29 में वृत्त की छेदन रेखा k द्वारा, C केंद्र वाले वृत्त के AYB और AXB दो चाप बनते हैं ।

वृत्त की छेदन रेखा के जिस ओर वृत्त का केंद्र होता है उस ओर के चाप को **दीर्घ चाप** तथा दूसरी ओर के चाप को **लघु चाप** कहते हैं । आकृति 3.29 में चाप AYB दीर्घ चाप और चाप AXB लघु चाप है । किसी वृत्त चाप का नाम तीन अक्षरों का उपयोग करके लिखने से संकल्पना स्पष्ट होती है । परंतु यदि कोई संदेह न हो तो लघु चाप का नाम उनके अंत बिंदु दर्शाने वाले दो अक्षरों द्वारा लिखते हैं । उदाहरण के लिए आकृति 3.29 में चाप AXB को चाप AB भी लिखते हैं ।

हम चाप का नाम लिखने के लिए इसी पद्धति का उपयोग करने वाले हैं ।

केंद्रीय कोण (Central angle)



आकृति 3.30

जिस कोण का शीर्ष बिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है, उस कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं ।

आकृति 3.30 में O केंद्रवाले वृत्त का $\angle AOB$ केंद्रीय कोण है ।

वृत्त की छेदन रेखा की तरह ही केंद्रीय कोण द्वारा भी वृत्त के दो चाप बनते हैं ।

चाप का माप (Measure of an arc)

कई बार दो चापों में तुलना करने की आवश्यकता होती है। इसके लिए चाप के माप की व्याख्या आगे दी गई है।

(1) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है ।

आकृति 3.30 में केंद्रीय $\angle$ AOB का माप θ है। इसलिए लघु चाप APB का भी माप θ होगा ।

(2) दीर्घ चाप का माप = 360° - संगत लघु चाप का माप

आकृति 3.30 में दीर्घ चाप AQB का माप = 360° - चाप APB का माप = $360^\circ - \theta$

(3) अर्धवृत्तीय चाप, अर्थात अर्ध वृत्त का माप 180° होता है ।

(4) पूर्ण वृत्तचाप का माप, अर्थात पूर्ण वृत्त का माप, 360° होता है ।

आओ जानें

चाप की सर्वांगसमता (Congruence of arcs)

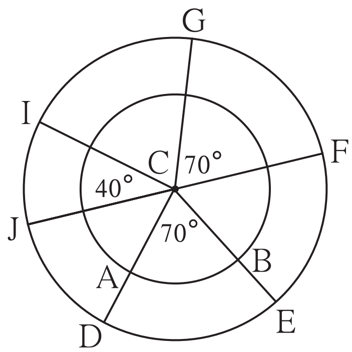
जब दो एक प्रतलीय आकृतियाँ एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेती हैं तो कहा जाता है कि वे आकृतियाँ एक दूसरे की सर्वांगसम हैं । सर्वांगसमता की इस संकल्पना के आधार पर समान मापवाले कोण सर्वांगसम होते हैं यह हमें ज्ञात है ।

इसी प्रकार दो चापों के माप समान हों तो वे दोनों चाप सर्वांगसम होंगे क्या ?

इस प्रश्न का उत्तर दी गई कृति करके प्राप्त कीजिए ।

कृति :

आकृति 3.31 में दर्शाए अनुसार C केंद्रवाले दो वृत्त खींचिए। $\angle$ DCE और $\angle$ FCG समान मापवाले कोण बनाइए। इन कोणों के माप से अलग मापवाला $\angle$ ICJ खींचिए ।



आकृति 3.31

$\angle$ DCE की भुजा द्वारा आंतरिक वृत्त को प्रतिच्छेदित करने पर प्राप्त चाप को AB नाम दीजिए ।

चाप के माप की व्याख्या के आधार पर, चाप AB और चाप DE के माप समान है, यह ध्यान में आता है । क्या वे दोनों चाप आपस में एक दूसरे को ढँक लेंगे ? निश्चित ही ढँक नहीं पाएँगे ।

अब C-DE; C-FG और C-IJ वृत्त खंड काटकर अलग कीजिए । उन्हें एक दूसरे के ऊपर रखकर देखिए कि DE, FG और IJ में से कौन-सा चाप एक दूसरे को ढँक लेता है ।

इस कृति के आधार पर यह ध्यान आता है कि दो चाप सर्वांगसम होने के लिए 'उनके माप समान हैं' यह पर्याप्त नहीं है ?

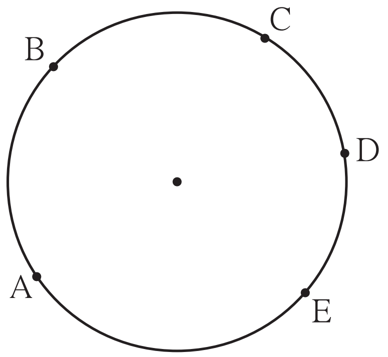
दो चाप सर्वांगसम होने के लिए अन्य कौन-सी शर्तें पूरी होनी आवश्यक हैं ?

उपर्युक्त कृति से ज्ञात होता है, कि -

दो चापों की त्रिज्या एवं माप समान होते हैं तो वे दोनों चाप परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

'चाप DE तथा चाप GF सर्वांगसम हैं।' इसे चिन्ह द्वारा चाप DE $\cong$ चाप GF ऐसे दर्शाते हैं ।

चाप के मापों के योग का गुणधर्म (Property of sum of measures of arcs)



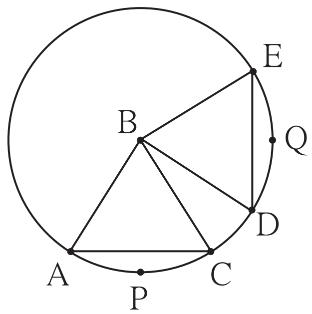
आकृति 3.32

आकृति 3.32 में A, B, C, D, E एक ही वृत्त के बिंदु हैं। इन बिंदुओं से अनेक चाप बनते हैं । इनमें से चाप ABC और चाप CDE के बीच एक और सिर्फ एक ही बिंदु C सामान्य है । अर्थात चाप ABC और चाप CDE के मापों का योगफल चाप ACE के माप के बराबर होता है ।

m(चाप ABC) + m(चाप CDE) = m(चाप ACE)

परंतु चाप ABC और चाप BCE के बीच एक से अधिक [चाप BC के सभी] सामान्य बिंदु हैं । अर्थात चाप ABC और चाप BCE के माप का योगफल चाप ABE के माप के बराबर नहीं होता है ।

प्रमेय : एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम चापों की संगत जीवा सर्वांगसम होती है ।



आकृति 3.33

दत्त : B केंद्र वाले वृत्त में चाप APC $\cong$ चाप DQE

साध्य : जीवा AC $\cong$ जीवा DE

उपपत्ति : (रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।)

Δ ABC और Δ DBE में,

भुजा AB $\cong$ भुजा DB .... (...................)

भुजा .... $\cong$ भुजा .... (...................)

$\angle$ABC $\cong$ $\angle$DBE .... (सर्वांगसम चापों की परिभाषा)

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ DBE .... (...................)

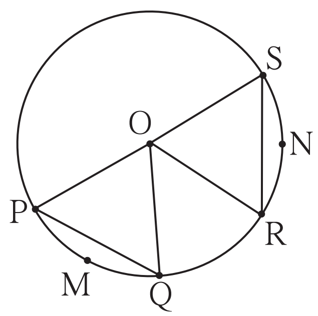
$\therefore$ जीवा AC $\cong$ जीवा DE ..... (...................)

प्रमेय : एक ही वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) सर्वांगसम जीवाओं के संगत चाप सर्वांगसम होते हैं ।

दत्त : O केंद्र वाले वृत्त में रेख PQ और रेख RS, सर्वांगसम जीवाएँ हैं ।

साध्य : चाप PMQ $\cong$ चाप RNS

आगे दिए गए विचार को ध्यान में रखकर उपपत्ति लिखिए । दो चाप सर्वांगसम होने के लिए उनकी त्रिज्याएँ तथा माप समान होने चाहिए । चाप PMQ और चाप RNS एक ही वृत्त के चाप होने के कारण उनकी त्रिज्या



आकृति 3.34

समान है । उन चापों के माप अर्थात उनके संगत केंद्रीय कोण के माप होते हैं । यह केंद्रीय कोण प्राप्त करने के लिए त्रिज्या OP, OQ, OR और OS खींचना पड़ेगा । इसे खींचने पर प्राप्त Δ OPQ और Δ ORS सर्वांगसम हैं कि नहीं ?

उपर्युक्त दोनों प्रमेय आप सर्वांगसम वृत्तों के लिए सिद्‌ध कीजिए ।

थोड़ा सोचें

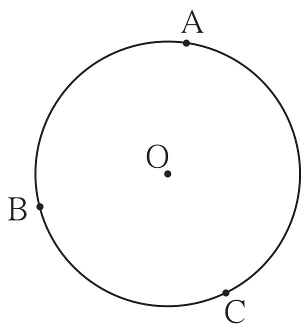
- उपर्युक्त दो में से पहले प्रमेय में लघुचाप APC और चाप DQE लघु चाप को सर्वांगसम माना है । क्या इनके संगत दीर्घ चापों को सर्वांगसम मानकर भी यह प्रमेय सिद्‌ध किया जा सकता है ?
- क्या दूसरे प्रमेय में सर्वांगसम जीवा के संगत दीर्घ चाप भी सर्वांगसम होते हैं ? जीवा PQ और जीवा RS यदि व्यास हों तो भी क्या यह प्रमेय सही होता है ?

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) O केंद्रवाले वृत्त के A, B तथा C तीन बिंदु हैं ।

(i) इन तीन बिंदुओं से बनने वाले सभी चापों के नाम लिखिए ।

(ii) चाप BC और चाप AB के माप क्रमशः 110° और 125° हों तो शेष सभी चापों के माप लिखिए ।



आकृति 3.35

हल : (i) चाप का नाम –

चाप AB, चाप BC, चाप AC, चाप ABC, चाप ACB, चाप BAC

(ii) चाप ABC का माप = चाप AB का माप + चाप BC का माप

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

चाप AC का माप = 360° – चाप ACB का माप

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

इसी प्रकार चाप ACB का माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

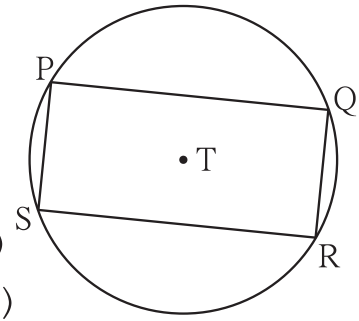
और चाप BAC का माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृति 3.36 में T केंद्र वाले वृत्त में आयत PQRS अंतर्लिखित है ।

दिखाइए कि –

(1) चाप PQ $\cong$ चाप SR

(2) चाप SPQ $\cong$ चाप PQR



आकृति 3.36

हल : (1) $\square$ PQRS एक आयत है ।

$\therefore$ जीवा PQ $\cong$ जीवा SR .... (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ चाप PQ $\cong$ चाप SR ...... (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

(2) जीवा PS $\cong$ जीवा QR ..... (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ चाप SP $\cong$ चाप QR ..... (सर्वांगसम जीवा के संगत चाप)

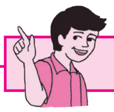
$\therefore$ चाप SP और चाप QR के माप समान हैं ..... (I)

अब, चाप SP और चाप PQ के मापों का योगफल

= चाप PQ और चाप QR के मापों का योगफल

$\therefore$ चाप SPQ का माप = चाप PQR का माप

$\therefore$ चाप SPQ $\cong$ चाप PQR



इसे ध्यान में रखें

(1) जिस कोण का शीर्षबिंदु वृत्त के केंद्र पर होता है उस कोण को केंद्रीय कोण कहते हैं ।

(2) चाप के माप की परिभाषा – (i) लघु चाप का माप उसके संगत केंद्रीय कोण के माप के बराबर होता है ।
(ii) दीर्घ चाप का माप = 360° – संगत लघु चाप का माप (iii) अर्धवृत्त के चाप का माप 180° होता है ।

(3) किन्हीं दो वृत्त चापों की त्रिज्या और माप समान हों तो वे सर्वांगसम होते हैं ।

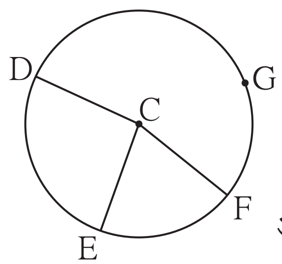
(4) एक ही वृत्त के चाप ABC और चाप CDE के बीच जब एक ही सामान्य बिंदु C होता है, तब
m(चाप ABC) + m(चाप CDE) = m(चाप ACE)

(5) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम चापों की संगत जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

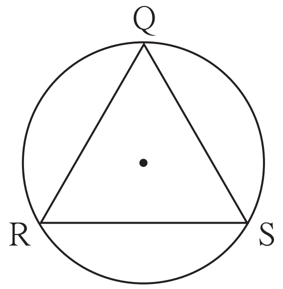
(6) एक ही वृत्त के (या सर्वांगसम वृत्तों के) सर्वांगसम जीवाओं के संगत चाप सर्वांगसम होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. आकृति 3.37 में, C केंद्रवाले वृत्त पर G, D, E और F बिंदु हैं। $\angle$ ECF का माप 70° और चाप DGF का माप 200° हो, तो चाप DE और चाप DEF के माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.37



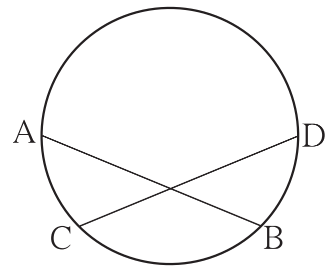
आकृति 3.38

2★. आकृति 3.38 में Δ QRS समबाहु त्रिभुज है । तो सिद्ध कीजिए –

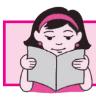
(1) चाप RS $\cong$ चाप QS $\cong$ चाप QR

(2) चाप QRS का माप 240° है ।

3. आकृति 3.39 में, जीवा AB $\cong$ जीवा CD, तो सिद्ध कीजिए – चाप AC $\cong$ चाप BD



आकृति 3.39

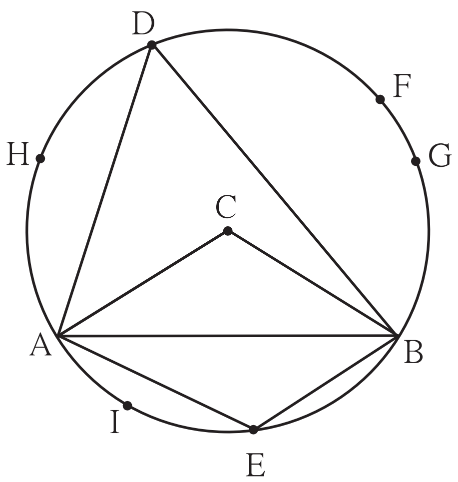


आओ जानें

वृत्त और बिंदु, वृत्त और रेखा (स्पर्श रेखा) में परस्पर संबंध बताने वाले कुछ गुणधर्म हमने देखें । आइए अब हम वृत्त और कोण में संबंध दर्शाने वाले कुछ गुणधर्म देखते हैं। इनमें से कुछ गुणधर्म दी गई कृतियों से जानिए ।

कृति I :

C केंद्र वाला एक पर्याप्त बड़ा वृत्त खींचिए। आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB खींचिए ।



आकृति 3.40

केंद्रीय कोण ACB खींचिए । आकृति 3.40 में दर्शाए अनुसार उसकी जीवा AB द्‍वारा बनने वाले दीर्घ चाप पर कोई बिंदु D तथा लघु चाप पर कोई बिंदु E लें ।

(1) $\angle$ADB और $\angle$ACB मापें। उनके मापों की तुलना कीजिए ।

(2) $\angle$ADB और $\angle$AEB मापें। प्राप्त मापों का योगफल ज्ञात करके देखें ।

(3) चाप ADB पर F, G, H ऐसे कुछ और बिंदु लीजिए ।
$\angle AFB$, $\angle AGB$, $\angle AHB$, ... के माप ज्ञात कीजिए ।
इन मापों की आपस में तथा $\angle ADB$ के माप से तुलना कीजिए ।

(4) चाप AEB पर एक अन्य बिंदु I लीजिए । $\angle$ AIB को मापकर उसके माप की तुलना $\angle$ AEB के माप से कीजिए।

इस कृति से आपको इस प्रकार का अनुभव प्राप्त होता है –

(1) $\angle$ ACB का माप $\angle$ ADB के माप का दो गुना होता है ।

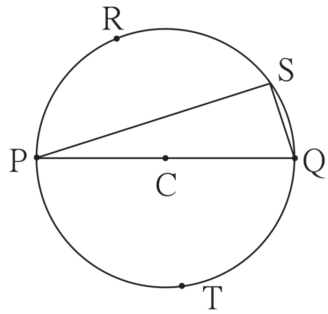
(2) $\angle$ ADB और $\angle$ AEB के मापों का योगफल 180° होता है ।

(3) $\angle$ AHB, $\angle$ ADB, $\angle$ AFB, $\angle$ AGB इन सभी के माप समान हैं ।

(4) $\angle$ AEB और $\angle$ AIB के माप समान हैं ।

कृति II :

आकृति 3.41 में दर्शाएनुसार C केंद्रवाला एक बड़ा वृत्त बनाइए। उसमें एक व्यास PQ खींचिए । इस व्यास से बने दोनों अर्धवृत्तों पर R,S,T ऐसे कुछ बिंदु लीजिए। $\angle$ PRQ, $\angle$ PSQ, $\angle$ PTQ मापिए । इनमें से प्रत्येक कोण समकोण है यह अनुभव कीजिए।



आकृति 3.41

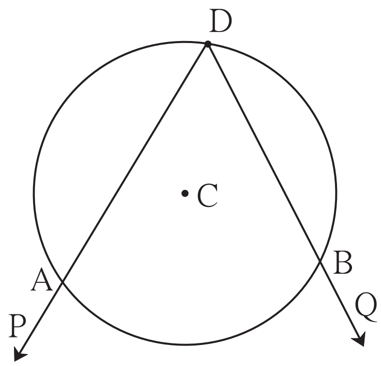
उपर्युक्त कृति से प्राप्त गुणधर्म का अर्थ वृत्त और कोण से संबंधित प्रमेय है।

अब इस प्रमेय की उपपत्ति सीखें, इससे पहले कुछ संज्ञाओं (संबोधो) की पहचान करनी होगी।

अंतर्लिखित कोण (Inscribed angle)

आकृति 3.42 में C केंद्रवाला एक वृत्त है । $\angle$ PDQ का शीर्षबिंदु D इस वृत्त पर है । कोण की भुजाएँ DP और DQ वृत्त को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेदित करती हैं। ऐसे कोण को वृत्त का अंतर्लिखित कोण कहते हैं ।

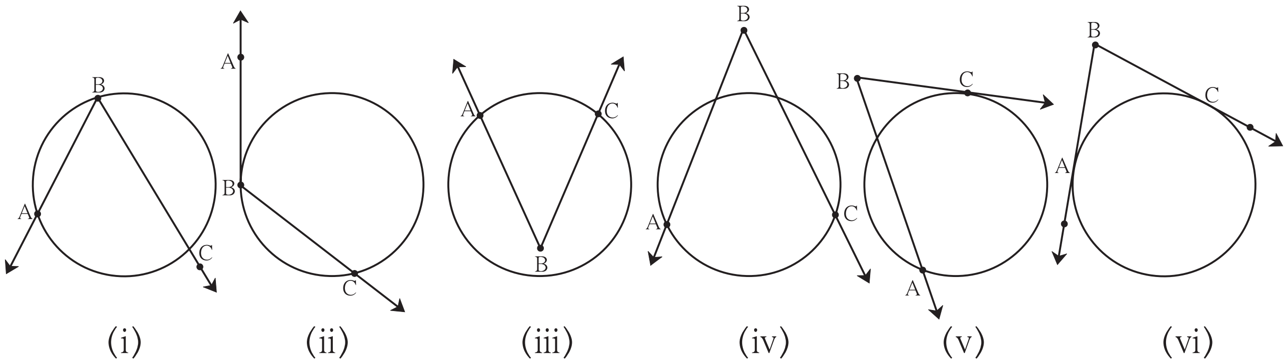
आकृति 3.42 में $\angle$ ADB चाप ADB में अंतर्लिखित है ।



आकृति 3.42

अंतःखंडित चाप (Intercepted arc)

दी गई आकृति 3.43 में (i) से (vi) सभी आकृतियों का निरीक्षण कीजिए ।



आकृति 3.43

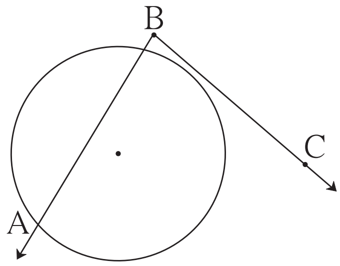
प्रत्येक आकृति में ∠ ABC के अंतःभाग में आनेवाले वृत्त चाप को ∠ ABC द्वारा अंतःखंडित चाप कहते हैं।

अंतःखंडित चाप के अंतबिंदु वृत्त और कोण के छेदन बिंदु होते हैं। कोण की प्रत्येक भुजा पर चाप का एक अंत बिंदु होना आवश्यक होता है ।

आकृति 3.43 के (i), (ii) तथा (iii) आकृतियों में प्रत्येक कोण ने एक ही चाप अंतःखंडित किया है; (iv), (v) तथा (vi) में प्रत्येक कोण ने दो चाप अंतःखंडित किया है ।

ध्यान रहे, आकृति (ii) तथा (v) में कोण की एक भुजा और (vi) में कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं ।

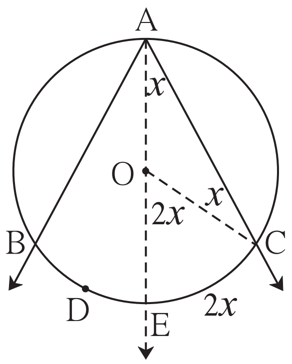
आकृति 3.44 में चाप, अंतःखंडित चाप नहीं है क्योंकि कोण की भुजा BC पर चाप का एक भी अंत बिंदु नहीं है ।



आकृति 3.44

अंतर्लिखित कोण का प्रमेय (Inscribed angle theorem)

वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।



आकृति 3.45

दत्त : O केंद्र वाले वृत्त में, ∠ BAC चाप BAC में अंतर्लिखित है । इस कोण द्वारा चाप BDC अंतःखंडित हुआ है ।

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2}\ m(\text{चाप BDC})$

रचना : किरण AO खींचिए। यह वृत्त को बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करता है । त्रिज्या OC खींचिए ।

उपपत्ति : Δ AOC में

भुजा OA $\cong$ भुजा OC ...... (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OCA$ ..... (समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय)

माना $\angle OAC = \angle OCA = x$ ...... (I)

अब, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (त्रिभुज के बहिष्कोण का प्रमेय)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

परंतु $\angle EOC$ यह केंद्रीय कोण है ।

$\therefore$ m(चाप EC) $= 2x^\circ$ .... (चाप के माप की परिभाषा से) ..... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) के आधार पर

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(चाप EC) ..... (III)

इसी प्रकार, त्रिज्या OB खींचकर, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(चाप BE) सिद्ध किया जा सकता है ...(IV)

$\therefore$ $\angle$ EAC + $\angle$ EAB = $\frac{1}{2}$ m(चाप EC) + $\frac{1}{2}$ m(चाप BE) .... (III) तथा (IV) से

$\therefore$ $\angle$ BAC = $\frac{1}{2}$ [m(चाप EC) + m(चाप BE)]

= $\frac{1}{2}$ [m(चाप BEC) = $\frac{1}{2}$ [m(चाप BDC)] ..... (V)

ध्यान रहे, कि वृत्त में अंतर्लिखित कोण और वृत्त केंद्र से संबंधित तीन दशाएँ संभव हैं । वृत्त केंद्र कोण की भुजा पर हो, अंतःभाग में हो या बाह्य भाग में हो । इनमें से पहली दो दशाएँ (III) तथा (V) में सिद्ध हो गई हैं । अब शेष तीसरी दशा पर विचार करेंगे ।

आकृति 3.46 में,

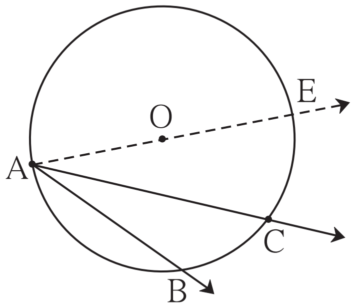
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

= $\frac{1}{2}$ [m(चाप BCE) − $\frac{1}{2}$ m(चाप CE)]

...... (III) से

= $\frac{1}{2}$ [m(चाप BCE) − m(चाप CE)]

= $\frac{1}{2}$ [m(चाप BC)] ...... (VI)



आकृति 3.46

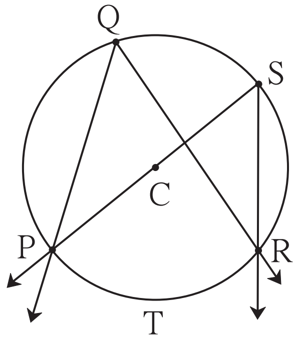
इस प्रमेय का कथन इस प्रकार भी लिखतें हैं ।

वृत्त चाप द्‌वारा वृत्त के किसी भी बिंदु से अंतरित (subtended)किए गए कोण का माप उसी चाप द्‌वारा वृत्त केंद्र से अंतरित किए गए कोण के माप के आधा होता है ।

इस प्रमेय के आगे दिए गए उप प्रमेयों के कथन भी इस परिभाषा के अनुसार लिख सकते हैं ।

अंतर्लिखित कोण के प्रमेय का उपप्रमेय (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. एक ही चाप में अंतर्लिखित सभी कोण सर्वांगसम होते हैं ।



आकृति 3.47

आकृति 3.47 के आधार पर दत्त और साध्य लिखिए । दिए गए प्रश्नों का विचार करके उपपत्ति लिखिए ।

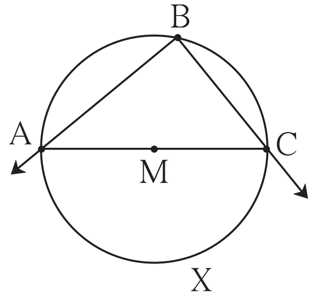
(1) $\angle$ PQR से कौन-सा चाप अंतःखंडित है ?

(2) $\angle$ PSR से कौन-सा चाप अंतःखंडित है ?

(3) अंतर्लिखित कोण के माप और उससे अंतःखंडित चाप के माप में किस प्रकार का संबंध है ?

2. अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होता है ।

संलग्न आकृति 3.48 के आधार पर प्रमेय के दत्त, साध्य और उपपत्ति लिखिए ।



आकृति 3.48

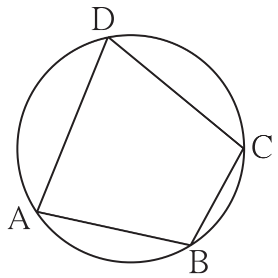
चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic quadrilateral)

किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष बिंदु एक ही वृत्त पर हों तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं ।

चक्रीय चतुर्भुज का प्रमेय (Theorem of cyclic quadrilateral)

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

आगे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उसे पूर्ण कीजिए ।



आकृति 3.49

दत्त : $\square$ $\boxed{}$ एक चक्रीय चतुर्भुज है ।

साध्य : $m\angle B + m\angle D = \boxed{}$

$\boxed{} + \angle C = 180°$

उपपत्ति : $\angle$ ADC एक अंतर्लिखित कोण है तथा इसके द्वारा चाप ABC अंतःखंडित किया गया है ।

$\therefore m\angle ADC = \frac{1}{2}$ $\boxed{}$ .... (I)

इसी प्रकार $\boxed{}$ एक अंतर्लिखित कोण है तथा इसके द्वारा चाप ADC अंतःखंडित किया गया है ।

$\therefore \boxed{\quad\quad} = \frac{1}{2}$ m(चाप ADC) ..... (II)

$\therefore m\angle ADC + \boxed{\quad\quad} = \frac{1}{2} \boxed{\quad\quad} + \frac{1}{2}$ m(चाप ADC) ..... (I) तथा (II) से

$= \frac{1}{2} [\boxed{\quad\quad} +$ m(चाप ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ .... [चाप ABC और चाप ADC मिलकर पूरा वृत्त बनता है ।]

$= \boxed{\quad\quad}$

इसी प्रकार $\angle A + \angle C = \boxed{\quad\quad}$ सिद्ध किया जा सकता है ।

चक्रीय चतुर्भुज के प्रमेय का उपप्रमेय (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके संलग्न कोण के सम्मुख कोण के सर्वांगसम होते हैं ।

इस प्रमेय की उपपत्ति लिखिए ।

थोड़ा सोचें

(1) उपर्युक्त प्रमेय में $\angle B + \angle D = 180^\circ$ यह सिद्ध करने पर शेष सम्मुख कोणों के मापों का योगफल भी 180° होता है, क्या यह किसी अन्य प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है?

चक्रीय चतुर्भुज के प्रमेय का विलोम (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक हों तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है ।

यह प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धति से सिद्ध किया जाता है । प्रयत्न कीजिए ।

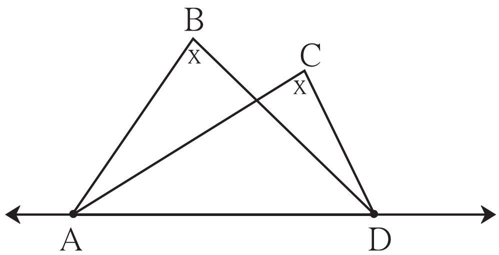
उपर्युक्त विलोम के आधार पर यह ध्यान में आता है कि, यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं तो उस चतुर्भुज का परिवृत्त होता है ।

प्रत्येक त्रिभुज का एक परिवृत्त होता है, यह हमें ज्ञात है। परंतु प्रत्येक चतुर्भुज का परिवृत्त होता है ऐसा नहीं है, इसे समझिए ।

कौन-सी शर्त पूरी होने पर परिवृत्त होता है, अर्थात चतुर्भुज के शीर्षबिंदु वृत्त पर होते हैं इसे हम समझते हैं ।

एक अन्य परिस्थिति में चार अरेखीय बिंदु चक्रीय होते हैं । यह आगे दिए प्रमेय में बताया गया है ।

प्रमेय : **किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं ।**



आकृति 3.50

दत्त : बिंदु B तथा C रेखा AD के एक ही ओर स्थित हैं । $\angle ABD \cong \angle ACD$

साध्य : बिंदु A, B, C, D एक ही वृत्त पर हैं। (अर्थात $\square$ ABCD चक्रीय चतुर्भुज है ।)

पिछले प्रमेय के अनुसार इसको अप्रत्यक्ष रूप से सिद्ध कर सकते हैं ।

थोड़ा सोचें

उपर्युक्त प्रमेय किस प्रमेय का विलोम है ?

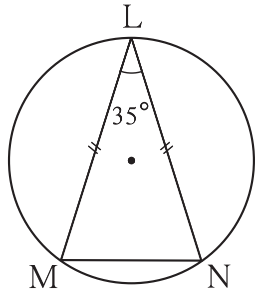
हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति 3.51 में, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\angle L = 35°$ तो

(i) m(चाप MN) = कितना ?

(ii) m(चाप LN) = कितना ?



आकृति 3.51

हल : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\ m$(चाप MN) ...... (अंतर्लिखित कोण प्रमेय)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\ m$(चाप MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(चाप MN) $= 70°$

(ii) m(चाप MLN) $= 360° - m$(चाप MN) ...... (चाप के माप की परिभाषा से)

$= 360° - 70° = 290°$

अब, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore$ चाप LM $\cong$ चाप LN

परंतु m(चाप LM) + m(चाप LN) = m(चाप LMN) $= 290°$.....(चापों के योगफल का गुणधर्म)

m(चाप LM) = m(चाप LN) $= \frac{290°}{2} = 145°$

अथवा, (ii) जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

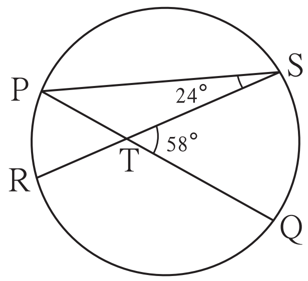
$\therefore\ 2\angle M = 180° - 35° = 145°$

$\therefore\ \angle M = \frac{145°}{2}$

m(चाप LN) = $2 \times \angle M$ .... (अंतर्लिखित कोण प्रमेय)

$$= 2 \times \frac{145^\circ}{2} = 145^\circ$$

उदा. (2) आकृति 3.52 में, जीवा PQ और जीवा RS एक दूसरे को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।



आकृति 3.52

(i) यदि $\angle STQ = 58^\circ$ और $\angle PSR = 24^\circ$, तो m(चाप SQ) ज्ञात कीजिए ।

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)] इसकी जाँच कीजिए ।

(iii) जीवा PQ और जीवा RS के बीच किसी भी माप का कोण हो फिर भी सिद्‌ध कीजिए कि $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)]

(iv) इस उदाहरण से सिद्‌ध होने वाले गुणधर्म को कथन के रूप में लिखिए ।

हल : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58 - 24 = 34^\circ$ .... (त्रिभुज के बाह्‍य्‌ कोण का प्रमेय)

m(चाप QS) = $2\angle SPQ = 2 \times 34 = 68^\circ$

(ii) m(चाप PR) = $2\angle PSR = 2 \times 24 = 48^\circ$

अब, $\frac{1}{2}$ [m(चाप PR) + m(चाप SQ)] = $\frac{1}{2}$ [48 + 68]

$$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$$

$$= \angle STQ$$

(iii) इस गुणधर्म की उपपत्ति रिक्त स्थानों की पूर्ति कर पूर्ण कीजिए ।

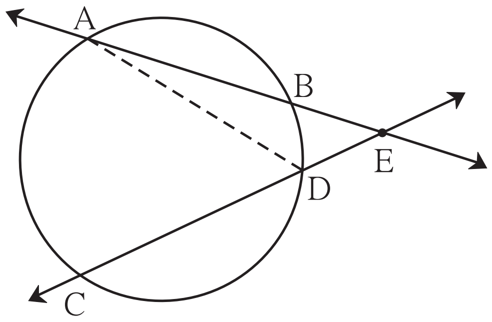
$m\angle STQ = m\angle SPQ + \boxed{}$ .... (त्रिभुज के बाह्‍य्‌ कोण का प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ m(चाप SQ) + $\boxed{}$ .... (अंतर्लिखित कोण का प्रमेय)

$= \frac{1}{2} [\boxed{} + \boxed{}]$

(iv) वृत्त की जीवाएँ एक दूसरे को वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हों तो उन जीवाओं के बीच बनने वाला कोण, उस कोण द्‌वारा अंतःखंडित चाप और उसके शीर्षाभिमुख कोण द्‌वारा अंतःखंडित चाप के माप के योगफल का आधा होता है ।

उदा. (3) सिद्ध कीजिए कि वृत्त की जीवाओं को समाविष्ट करने वाली रेखा यदि वृत्त के बाह्य भाग में प्रतिच्छेदित करती हो तो उन रेखाओं द्‌वारा बने कोण का माप उस कोण द्‌वारा अंतःखंडित चापों के मापों की दूरी का आधा होता है । सिद्ध कीजिए ।



आकृति 3.53

दत्त : वृत्त की जीवा AB और जीवा CD उस वृत्त के बाह्यभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं ।

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AC) - m(\text{चाप } BD)]$

रचना : रेख AD खींचा ।

उपपत्ति : इस गुणधर्म को उपर्युक्त उदा. (2) में दी गई उपपत्ति के अनुसार सिद्ध किया जा सकता है । इसके लिए Δ AED के कोण, उस त्रिभुज के बहिष्कोण इत्यादि को ध्यान में रखकर उपपत्ति लिखिए ।

इसे ध्यान में रखें

(1) वृत्त में अंतर्लिखित कोण का माप, उसके द्‌वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।

(2) वृत्त के एक ही चाप में अंतर्लिखित सभी कोण सर्वांगसम होते हैं ।

(3) अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होते हैं ।

(4) यदि चतुर्भुज के चारों शीर्षबिंदु एक ही वृत्त पर हों तो उस चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं ।

(5) चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं ।

(6) चक्रीय चतुर्भुज के बहिष्कोण उसके संलग्न कोण के सम्मुख कोण के सर्वांगसम होते हैं ।

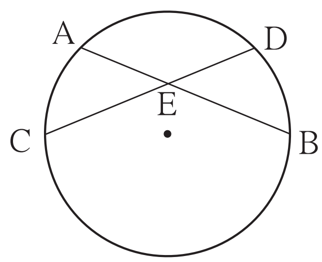
(7) चतुर्भुज के सम्मुख कोण परस्पर संपूरक हों तो चतुर्भुज चक्रीय होता है ।

(8) किसी रेखा पर स्थित दो भिन्न बिंदु उसी रेखा के एक ही ओर स्थित दो भिन्न बिंदुओं पर सर्वांगसम कोण बनाते हों तो वे चारों बिंदु एक ही वृत्त पर होते हैं ।

(9) संलग्न आकृति 3.54 में,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AC) + m(\text{चाप } DB)]$

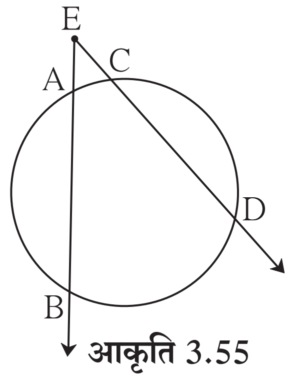
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{चाप } AD) + m(\text{चाप } CB)]$



आकृति 3.54

(10) संलग्न आकृति 3.55 में,

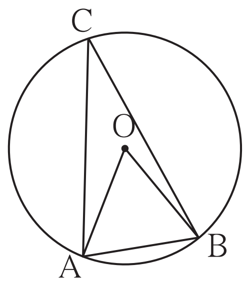
$$\angle BED = \frac{1}{2}\ [m(\text{चाप } BD) - m(\text{चाप } AC)]$$



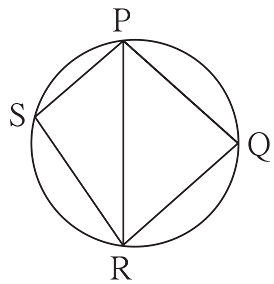
आकृति 3.55

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. आकृति 3.56 में, O केंद्र वाले वृत्त की जीवा AB की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है । तो (1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) चाप AB और (4) चाप ACB का माप ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.56



आकृति 3.57

2. आकृति 3.57 में, $\square$ PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है। भुजा PQ $\cong$ भुजा RQ $\angle PSR = 110°$, तो

(1) $\angle PQR$ = कितना ?

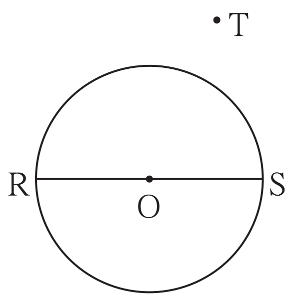
(2) m(चाप PQR) = कितना ?

(3) m(चाप QR) = कितना ?

(4) $\angle PRQ$ = कितना ?

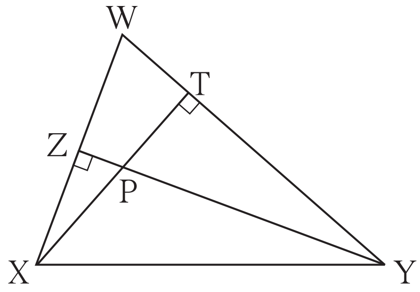
3. चक्रीय $\square$ MRPN में, $\angle R = (5x - 13)°$ और $\angle N = (4x + 4)°$, तो $\angle R$ और $\angle N$ के माप ज्ञात कीजिए ।

4. आकृति 3.58 में रेख RS ; O केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । बिंदु T वृत्त के बाह्यभाग में स्थित एक बिंदु है । तो सिद्ध कीजिए $\angle RTS$ एक न्यूनकोण है ।



आकृति 3.58

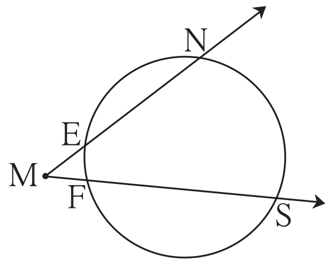
5. सिद्ध कीजिए कि कोई भी आयत चक्रीय चतुर्भुज होता है ।



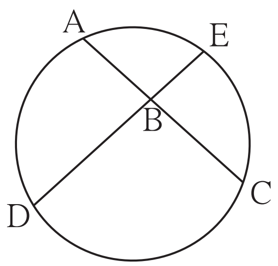
आकृति 3.59

6. आकृति 3.59 में, रेख YZ और रेख XT Δ WXY के शीर्षबिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि
(i) $\square$ WZPT एक चक्रीय चतुर्भुज है ।
(ii) बिंदु X, Z, T, Y एक ही वृत्त पर हैं ।

7. आकृति 3.60 में m(चाप NS) = 125°, m(चाप EF) = 37°, तो $\angle$NMS का माप ज्ञात कीजिए ।

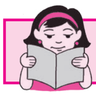


आकृति 3.60



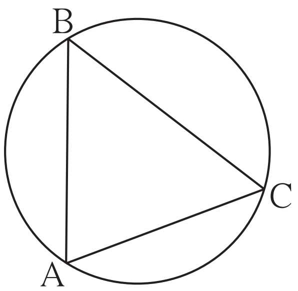
आकृति 3.61

8. आकृति 3.61 में जीवा AC और जीवा DE बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती हैं । यदि $\angle$ABE = 108° और m(चाप AE) = 95° तो m(चाप DC) ज्ञात कीजिए ।


आओ जानें

कृति :

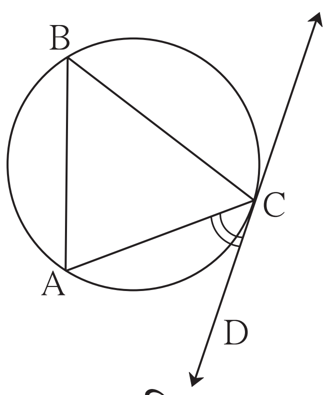
एक पर्याप्त बड़े आकार का वृत्त खींचिए । आकृति 3.62 में दर्शाए अनुसार वृत्त में एक जीवा AC खींचिए ।



आकृति 3.62

वृत्त पर एक बिंदु B लीजिए । $\angle$ABC एक अंतर्लिखित कोण बनाइए । $\angle$ABC का माप ज्ञात कर के लिखिए ।

अब, आकृति 3.63 में दर्शाए अनुसार उस वृत्त की स्पर्शरेखा CD खींचिए । $\angle$ACD का माप नापिए ।



आकृति 3.63

$\angle ACD$ का माप, $\angle ABC$ के माप के बराबर है । यह आपको समझ में आएगा ।

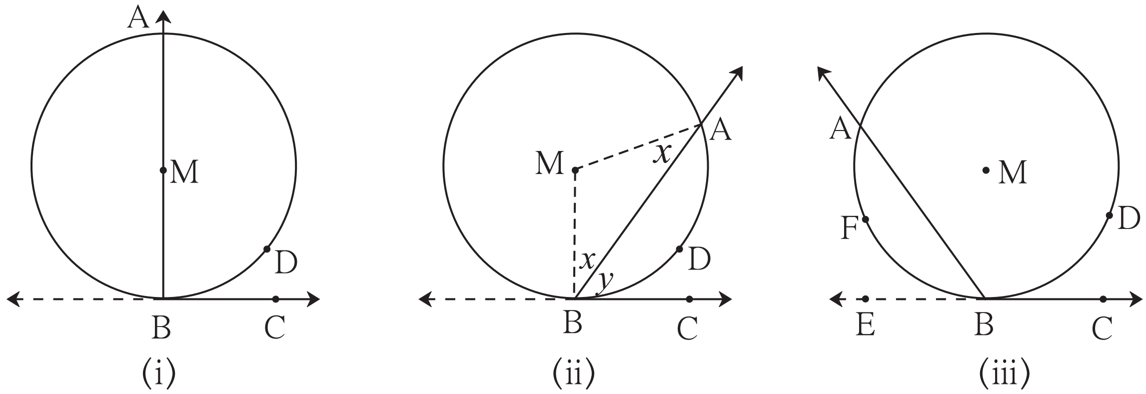
आप जानते हैं कि, $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(चाप AC) ।

इस आधार पर यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि, $\angle ACD$ का माप चाप AC के माप के आधा होता है ।

यह भी वृत्त की स्पर्शरेखा का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है। आइए इसे हम सिद्ध करें ।

स्पर्श रेखा–छेदन रेखा कोण का प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

यदि किसी कोण का शीर्षबिंदु वृत्त पर है, एक भुजा वृत्त को स्पर्श करती है तथा दूसरी भुजा वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हो, तो कोण का माप उसके द्वारा अंतःखंडित चाप के माप का आधा होता है ।



आकृति 3.64

दत्त : $\angle$ ABC का शीर्ष बिंदु M केंद्र वाले वृत्त पर है । भुजा BC वृत्त को स्पर्श करती है । भुजा BA वृत्त को बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करती है । चाप ADB, कोण $\angle$ ABC द्वारा अंतःखंडित चाप है ।

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(चापADB)

उपपत्ति : यह प्रमेय सिद्ध करने के लिए तीन संभावनाओं पर विचार करना होगा ।

(1) आकृति 3.64 (i) के अनुसार वृत्त का केंद्र M, $\angle$ ABC के एक भुजा पर हो,

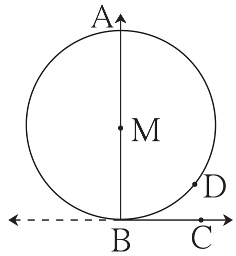
तो $\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शरेखा प्रमेय) (I)

चाप ADB एक अर्धवृत्त है ।

$\therefore\ m$(चाप ADB) = 180° ..... (चाप के माप की परिभाषा से) (II)

(I) तथा (II) से

$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(चाप ADB)



आकृति 3.64(i)

(2) आकृति 3.64 (ii) के अनुसार केंद्र M, $\angle$ ABC के बाह्यभाग में होने पर,

त्रिज्या MA और त्रिज्या MB खींचिए ।

अब, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (समद्विबाहु त्रिभुज प्रमेय)

इसी प्रकार, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शरेखा प्रमेय) ..... (I)

माना $\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y

$\angle$ AMB = 180 − $(x + x)$ = 180 − $2x$

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

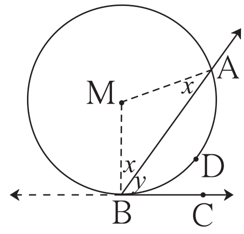
$\therefore\ x + y = 90^\circ$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ 2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMB में $2x$ + $\angle$ AMB = 180°

$\therefore\ 2x + 2y = 2x + \angle$ AMB

$\therefore\ 2y = \angle$ AMB

$\therefore\ y = \angle \text{ABC} = \frac{1}{2}\angle \text{AMB} = \frac{1}{2}$ m(चाप ADB)



आकृति 3.64(ii)

(3) तीसरी संभावना के लिए नीचे दी गई उपपत्ति आकृति 3.64 (iii) के आधार पर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कर स्वयं पूर्ण कीजिए ।

किरण $\boxed{\qquad\qquad}$ किरण BC की विपरीत किरण खींचा ।

अब, $\angle\text{ABE} = \frac{1}{2}$ m($\boxed{\qquad\qquad}$) ...... (2) में सिद्ध किया है ।

$\therefore$ 180 − $\boxed{\qquad\qquad}$ = $\angle$ABE ..... (रैखिक युगल कोण)

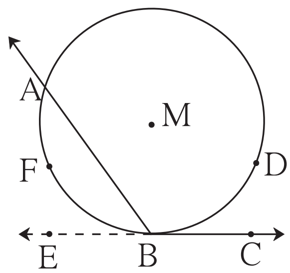
$\therefore$ 180 − $\boxed{\qquad\qquad}$ = $\frac{1}{2}$ m(चाप AFB)

$= \frac{1}{2}$ (360 − $\angle$ $\boxed{\qquad\qquad}$

$\therefore$ 180 − $\angle$ABC = 180 − $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB)

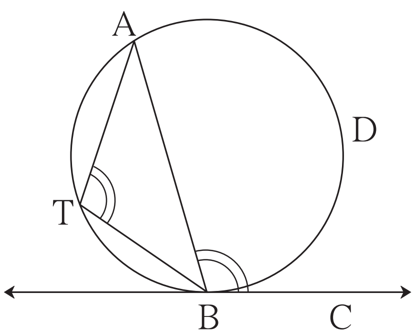
$\therefore$ − $\angle$ABC = − $\frac{1}{2}$ m($\boxed{\qquad\qquad}$)

$\therefore$ $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB)



आकृति 3.64(iii)

स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का वैकल्पिक कथन



आकृति 3.65

आकृति में AB वृत्त की छेदन रेखा और BC स्पर्श रेखा है। चाप ADB, $\angle$ABC द्वारा अंतःखंडित चाप है । जीवा AB वृत्त को दो चापों में विभाजित करती है । दोनों चाप एक दूसरे के विपरीत चाप होते हैं । अब चाप ADB के विपरीत चाप पर एक बिंदु T लिया। उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(चाप ADB) = $\angle$ATB ।

$\therefore$ वृत्त की स्पर्शरेखा तथा स्पर्श बिंदु से खींची गई जीवा द्वारा बना कोण, उसी कोण द्वारा अंतःखंडित चाप के विपरित चाप में अंतर्लिखित किए गए कोण के बराबर होता है ।

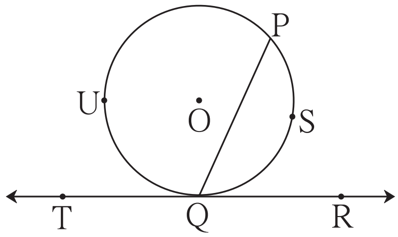
स्पर्श रेखा – छेदन रेखा कोण के प्रमेय का विलोम

किसी वृत्त की जीवा के एक अंत बिंदु से होकर जानेवाली रेखा खींचने पर, उस रेखा द्‌वारा उस जीवा पर बने कोण का माप उस कोण के अंतःखंडित चाप के माप का आधा हो, तो वह रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ।

आकृति 3.66 में,

यदि $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(चाप PSQ) हो,

[अथवा $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(चाप PUQ) हो]



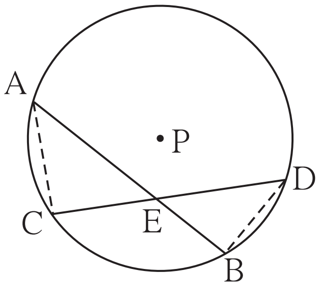
आकृति 3.66

तो रेखा TR वृत्त की स्पर्श रेखा होती है । इस विलोम का उपयोग, वृत्त की स्पर्श रेखा खींचने की किसी रचना के लिए होता है ।

जीवाओं का अंतःछेदन प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

किसी वृत्त की दो जीवाएँ जब वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हैं तब एक जीवा के दोनों भागों की लंबाईयों का गुणनफल दूसरी जीवा के बने दोनों भागों की लंबाइयों के गुणनफल के बराबर होता है ।

दत्त : P केंद्रवाले वृत्त की जीवा AB और जीवा CD, वृत्त के अंतःभाग में स्थित बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।



आकृति 3.67

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC और रेख DB खींचिए ।

उपपत्ति : Δ CAE और Δ BDE में,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (एक ही वृत्तचाप के अंतर्लिखित कोण)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (समरूपता की को- को कसौटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

थोड़ा सोचें

आकृति 3.67 में रेख AC और रेख DB खींचकर हमने प्रमेय सिद्‌ध किया। इसके स्थान पर क्या रेख AD और रेख CB खींच कर यह प्रमेय सिद्‌ध किया जा सकेगा ?

अधिक जानकारी हेतू

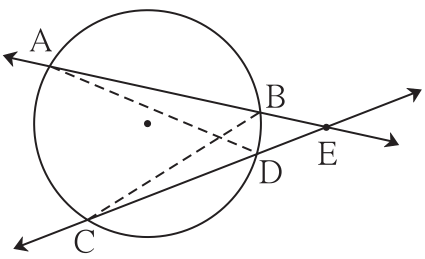
आकृति 3.67 में जीवा AB के, बिंदु E द्वारा AE और EB दो भाग हुए हैं। रेख AE और रेख EB संलग्न भुजाओं वाली आकृति बनाई, तो AE × EB उस आयत का क्षेत्रफल होगा। इसी प्रकार CE × ED जीवा CD के दो भागों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल होगा। हमने AE × EB = CE × ED सिद्ध किया है ।

इस प्रमेय को अन्य शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है–

किसी वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के अंतःभाग में प्रतिच्छेदित करती हों, तो एक जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के दो रेखाखंडों द्वारा बनने वाले आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है ।

जीवाओं का बहिर्च्छेदन प्रमेय (Theorem of external division of chords)

किसी वृत्त के AB और CD जीवा को समाविष्ट करने वाली प्रतिच्छेदन रेखाएँ एक दूसरे को वृत्त के बहिर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हों, तो AE × EB = CE × ED ।



आकृति 3.68

प्रमेय के उपर्युक्त कथन और आकृति के आधार पर दत्त तथा साध्य स्वयं निश्चित कीजिए ।

रचना : रेख AD और रेख BC खींचिए ।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कर नीचे दी गई उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

उपपत्ति : Δ ADE और Δ CBE में,

$\angle$ AED ≅ $\boxed{}$ .... (समान्य कोण)

$\angle$ DAE ≅ $\angle$ BCE .... ($\boxed{}$)

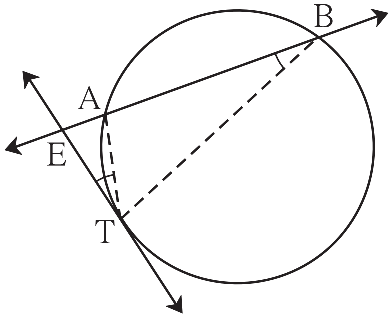
$\therefore \Delta$ ADE ~ $\boxed{}$ .... ($\boxed{}$)

$\therefore \dfrac{l(AE)}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\therefore \boxed{}$ = CE × ED

स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंडों का प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

यदि किसी वृत्त के बहिर्भाग में स्थित बिंदु E से खींची गई वृत्त की छेदन रेखा वृत्त को बिंदु A तथा B पर प्रतिच्छेदित करती हो और उसी बिंदु से होकर जाने वाली स्पर्शरेखा वृत्त को T बिंदु पर स्पर्श करती हो, तो $EA \times EB = ET^2$ ।



आकृति 3.69

प्रमेय के उपर्युक्त कथन को ध्यान में रखते हुए दत्त और साध्य निश्चित कीजिए ।

रचना : रेख TA और रेख TB खींचिए।

उपपत्ति : Δ EAT और Δ ETB में,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (सामान्य कोण)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.... (स्पर्श रेखा-छेदन रेखा प्रमेय)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ .... (समरूपता की को-को कसौटी)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ .... (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ)

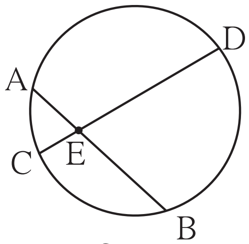
$\therefore EA \times EB = ET^2$

इसे ध्यान में रखें

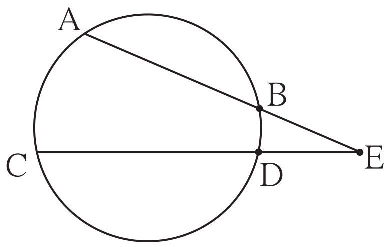
(1) आकृति 3.70 के अनुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

इस गुणधर्म को जीवा अंतःछेदन प्रमेय कहते हैं ।



आकृति 3.70



आकृति 3.71

(2) आकृति 3.71 के अनुसार,

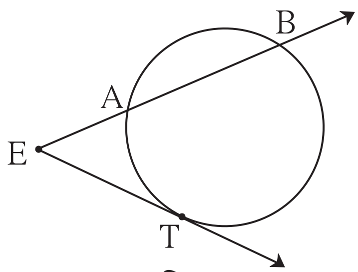
$AE \times EB = CE \times ED$

इस गुणधर्म को जीवा बहिर्छेदन प्रमेय कहते हैं ।

(3) आकृति 3.72 के अनुसार,

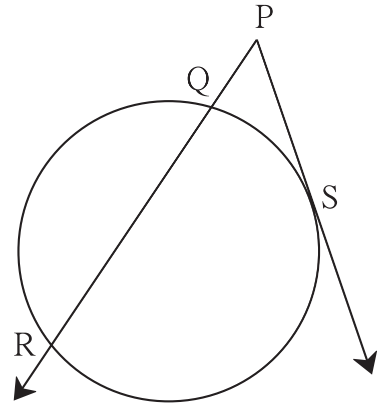
$EA \times EB = ET^2$

इस गुणधर्म को स्पर्शरेखा- छेदन रेखा रेखाखंड का प्रमेय कहते हैं ।



आकृति 3.72

उदा. (1) आकृति 3.73 में, रेख PS स्पर्श रेखाखंड है ।
रेखा PR वृत्त की छेदन रेखा है ।
यदि PQ = 3.6,
QR = 6.4 तो PS = ?(कितना)



आकृति 3.73

हल : $PS^2 = PQ \times PR$ .... स्पर्शरेखा छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय

$= PQ \times (PQ + QR)$

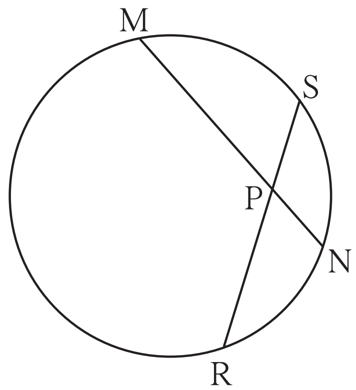
$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore$ PS = 6

उदा. (2) आकृति 3.74 में, जीवा MN और जीवा RS एक दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं । यदि PR = 6, PS = 4, MN = 11 तो PN ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.74

हल : जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय से,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

माना $PN = x$ $\therefore$ $PM = 11 - x$

यह मान (I) में रखनेपर,

$x\,(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore$ $11x - x^2 - 24 = 0$

$x^2 - 11x - 24 = 0$

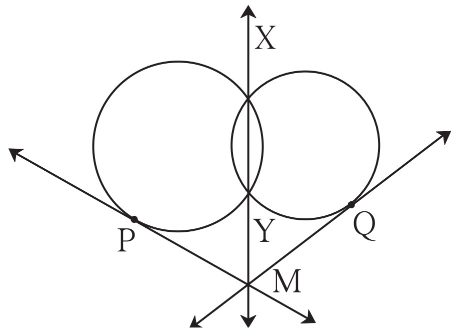
$\therefore$ $(x - 3)\,(x - 8) = 0$

$\therefore$ $x - 3 = 0$ या $x - 8 = 0$

$\therefore$ $x = 3$ या $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 या PN = 8

उदा. (3) आकृति 3.75 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु X तथा Y पर प्रतिच्छेदित करते हैं। रेखा XY पर स्थित बिंदु M से खींची गई स्पर्श रेखा उस वृत्त को बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है। तो सिद्‌ध कीजिए, रेख PM $\cong$ रेख QM ।



आकृति 3.75

हल : रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति लिखिए ।

रेखा MX दोनों वृत्तों की सामान्य .... है ।

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

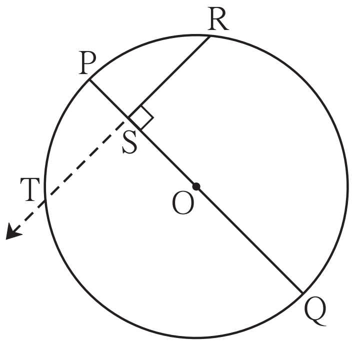
इसी प्रकार .... = ... × .... , (स्पर्शरेखा – छेदन रेखा रेखाखंड प्रमेय) ..... (II)

$\therefore$ (I) तथा (II) से ...... = QM^2

$\therefore$ PM = QM

रेख PM $\cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृति 3.76

आकृति 3.76 में, रेख PQ, 'O' केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । बिंदु R वृत्त पर स्थित कोई एक बिंदु है । रेख RS $\perp$ रेख PQ

तो सिद्‌ध कीजिए कि SR, PS तथा SQ का ज्यामितीय माध्य है ।

[अर्थात $SR^2 = PS \times SQ$]

हल : निम्नलिखित सोपानों के आधार पर उपपत्ति लिखिए ।

(1) किरण RS खींचिए । वह किरण वृत्त को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है उस बिंदु को T नाम दीजिए ।

(2) RS = TS दर्शाइए ।

(3) जीवाओं के अंतःछेदन प्रमेय का उपयोग कर समानता लिखिए ।

(4) RS = TS का उपयोग कर साध्य सिद्‌ध कीजिए ।

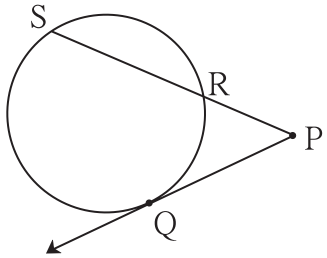
थोड़ा सोचें

(1) उपर्युक्त आकृति 3.76 में रेख PR और रेख RQ खींचने पर Δ PRQ किस प्रकार का होगा ?

(2) क्या उपर्युक्त उदा. (4) में सिद्‌ध किया गया गुणधर्म इसके पहले भी भिन्न तरीके से सिद्‌ध किया है ?

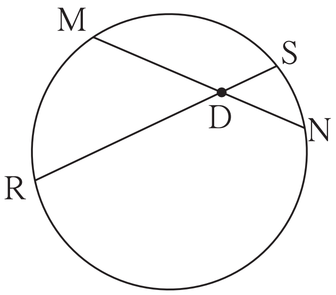
प्रश्नसंग्रह 3.5

1. आकृति 3.77 में, बिंदु Q एक स्पर्शबिंदु है ।
यदि PQ = 12, PR = 8,
तो PS = कितना ? RS = कितना ?



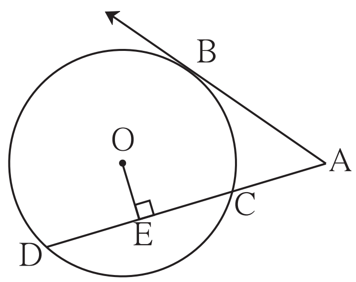
आकृति 3.77

2. आकृति 3.78 में, जीवा MN और RS एक दूसरे को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।
(1) यदि RD = 15, DS = 4,
MD = 8 तो DN = कितना ?
(2) यदि RS = 18, MD = 9,
DN = 8 तो DS = कितना ?



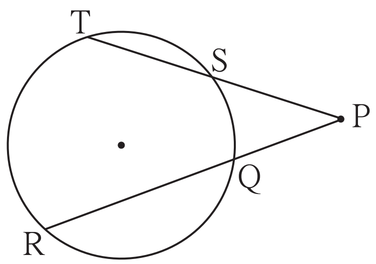
आकृति 3.78

3. आकृति 3.79 में, बिंदु B स्पर्श बिंदु और 'O' वृत्त का केंद्र है ।
रेख OE $\perp$ रेख AD, AB = 12,
AC = 8 तो
(1) AD (2) DC और
(3) DE = ज्ञात कीजिए।



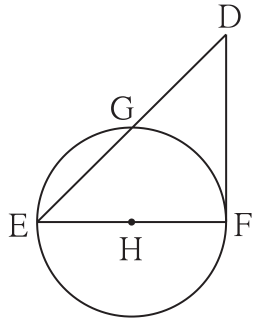
आकृति 3.79

4. आकृति 3.80 में, यदि l(PQ) = 6, QR = 10, PS = 8
तो TS = कितना ?



आकृति 3.80

5. आकृति 3.81 में, रेख EF व्यास और रेख DF स्पर्श रेखाखंड है। वृत्त की त्रिज्या r हो, तो सिद्ध कीजिए –
DE × GE = $4r^2$



आकृति 3.81

1. दिए गए प्रत्येक उप प्रश्न के लिए चार वैकल्पिक उत्तर दिए हैं । उनमें से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) क्रमशः 5.5 सेमी और 3.3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त परस्पर स्पर्श करते हैं । उनके केंद्रों के बीच की दूरी कितने सेमी होगी ?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 5.5 या 2.2

(2) परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले दो वृत्त एक दूसरे के केंद्र से होकर जाते हैं । यदि उनके केंद्रों के बीच की दूरी 12 सेमी हो, तो प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या कितने सेमी होगी?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) बताया नहीं जा सकता

(3) 'यदि कोई वृत्त किसी समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है, तो समांतर चतुर्भुज .... होना चाहिए', इस कथन में रिक्त स्थान में उचित शब्द लिखिए ।

(A) आयत (B) समचतुर्भुज (C) वर्ग (D) समलंब चतुर्भुज

(4) यदि किसी वृत्त के केंद्र से 12.5 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बिंदु से उस वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाखंड की लंबाई 12 सेमी हो, तो उस वृत्त का व्यास कितने सेमी होगा?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) परस्पर बाह्य स्पर्श करने वाले दो वृत्तों में अधिक से अधिक कितनी स्पर्शरिखाएँ खींची जा सकती हैं?

(A) एक (B) दो (C) तीन (D) चार

(6) 'O' केंद्र वाले वृत्त के चाप ACB में $\angle ACB$ अंतर्लिखित किया गया है । यदि $m\angle ACB = 65^\circ$ तो m(चाप ACB) = कितना?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) किसी वृत्त की जीवाएँ AB और CD परस्पर वृत्त के अंतर्भाग में बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करती हैं । यदि AE = 5.6, EB = 10, CE = 8 तो ED = कितना?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) चक्रीय $\square$ ABCD में $\angle$ A के माप का दुगुना $\angle$ B के माप के तिगुने के बराबर हो, तो $\angle$ C का माप कितना होगा ?

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

(9★) किसी वृत्त पर बिंदु A, B, C इस प्रकार है, कि m(चाप) AB = m(चाप BC) = 120° और दोनों चापों का कोई भी बिंदु सामान्य नहीं है । तो Δ ABC किस प्रकार का त्रिभुज है?

(A) समबाहु त्रिभुज (B) विषमबाहु त्रिभुज

(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज

(10)रेख XZ व्यास वाले वृत्त के अन्तःभाग में एक बिंदु Y है । तो निम्नलिखित में से कितने कथन सत्य हैं?

(1) $\angle$ XYZ न्यूनकोण नहीं हो सकता ।

(2) $\angle$ XYZ समकोण नहीं हो सकता ।

(3) $\angle$ XYZ अधिक कोण है ।

(4) $\angle$ XYZ के माप के संदर्भ में कोई निश्चित कथन नहीं किया जा सकता ।

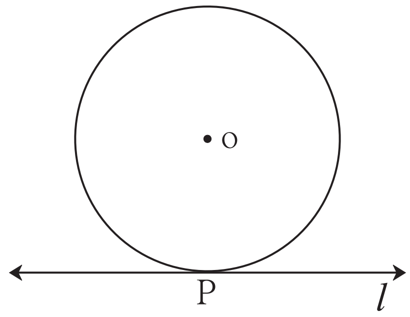
(A) सिर्फ एक (B) सिर्फ दो (C) सिर्फ तीन (D) सभी

2. 'O' केंद्रवाले वृत्त को रेखा l, बिंदु P पर स्पर्श करती है । यदि वृत्त की त्रिज्या 9 सेमी हो, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) d(O, P) = कितना? क्यों?

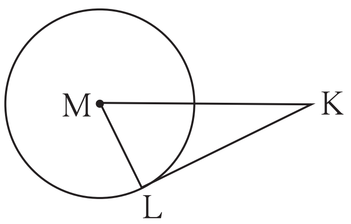
(2) यदि d(O, Q) = 8 सेमी हो,तो बिंदु Q का स्थान कहाँ होगा?

(3) d(O, R) = 15 सेमी, हो तो रेखा l पर बिंदु R कितनी जगह पर हो सकता है? वे बिंदु P से कितनी दूरी पर होंगे?



आकृति 3.82

3.



आकृति 3.83

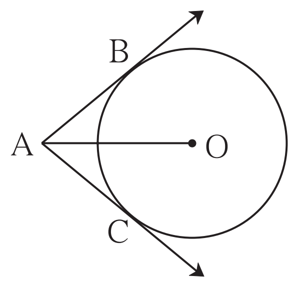
संलग्न आकृति 3.83 में, बिंदु M वृत्त का केंद्र और रेख KL स्पर्श रेखाखंड है ।

यदि MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ तो

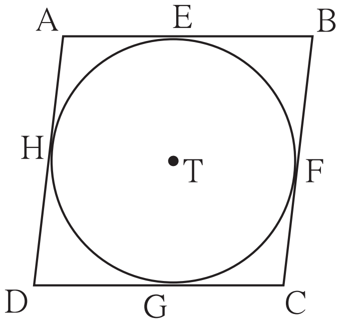
(1) वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

(2) $\angle$K और $\angle$M का माप ज्ञात कीजिए ।

4. आकृति 3.84 में, बिंदु 'O' वृत्त का केंद्र और रेख AB तथा रेख AC स्पर्शरेखाखंड हैं । यदि वृत्त की त्रिज्या r और AB = r हो, तो सिद्ध कीजिए कि, $\square$ ABOC एक वर्ग है ।



आकृति 3.84

5. 

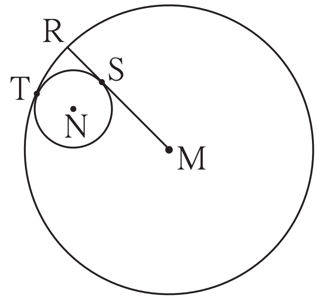
आकृति 3.85

आकृति 3.85 में, T केंद्र वाले वृत्त के चारों ओर समांतर □ ABCD परिलिखित किया गया है । (अर्थात उस चतुर्भुज की चारों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करती हैं ।) बिंदु E, F, G और H स्पर्श बिंदु है । यदि AE = 4.5 और EB = 5.5, तो AD का मान ज्ञात कीजिए ।

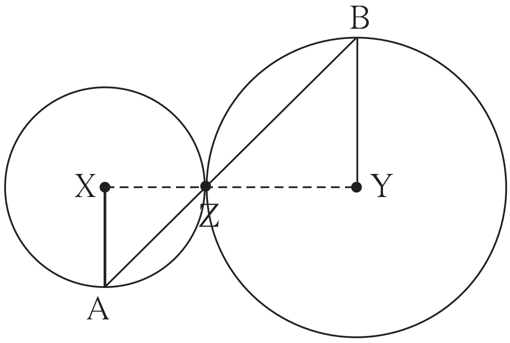
6. आकृति 3.86 में, N केंद्र वाला वृत्त M केंद्रवाले वृत्त को बिंदु T पर स्पर्श करता है । बड़े वृत्त की त्रिज्या छोटे वृत्त को बिंदु S पर स्पर्श करती है । यदि बड़े तथा छोटे वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 9 सेमी तथा 2.5 सेमी हो तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात कर इसके आधार पर MS : SR का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(1) MT = कितना ? (2) MN = कितना ?

(3) $\angle$NSM = कितना ?



आकृति 3.86



आकृति 3.87

7. संलग्न आकृति में, X और Y केंद्रवाले वृत्त परस्पर Z बिंदु पर स्पर्श करते हैं । बिंदु Z से होकर जानेवाली वृत्त की छेदन रेखा उन वृत्तों को क्रमशः बिंदु A तथा बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करती है । सिद्ध कीजिए कि त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति को पूर्ण कीजिए ।

रचना : रेख XZ और .... खींचिए ।

उपपत्ति : स्पर्शवृत्तों के प्रमेयानुसार, बिंदु X, Z, Y .... हैं ।

$\therefore \angle$ XZA $\cong$ .... (शीर्षाभिमुख कोण)

माना $\angle$ XZA = $\angle$ BZY = a ..... (I)

अब, रेख XA $\cong$ रेख XZ .... (..........)

$\therefore \angle$ XAZ = ... = a .... (समद्विबाहु त्रिभुज का प्रमेय) (II)

उसी प्रकार रेख YB $\cong$ .... (..........)

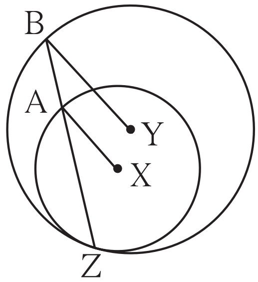
$\therefore \angle$ BZY = ... = a .... (..........) (III)

$\therefore$ (I), (II) तथा (III) से,

$\angle$ XAZ $\cong$ ....

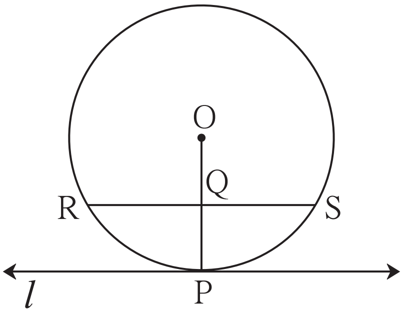
$\therefore$ त्रिज्या XA $\parallel$ त्रिज्या YB .... (..........)

8. आकृति 3.88 में, बिंदु X तथा बिंदु Y केंद्रवाले अंतःस्पर्शी वृत्त बिंदु Z पर स्पर्श करते हैं । बड़े वृत्त की जीवा BZ छोटे वृत्त को बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करती है, तो सिद्‌ध कीजिए, कि – रेख AX $\parallel$ रेख BY.



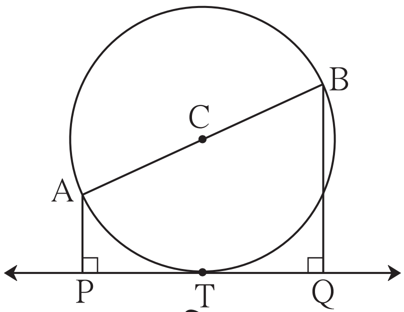
आकृति 3.88

9. संलग्न आकृति 3.89 में रेखा l, बिंदु O केंद्र वाले वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है । बिंदु Q त्रिज्या OP का मध्य बिंदु है । बिंदु Q से होकर जाने वाली जीवा RS $\parallel$ रेखा l । यदि RS = 12 सेमी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।



आकृति 3.89

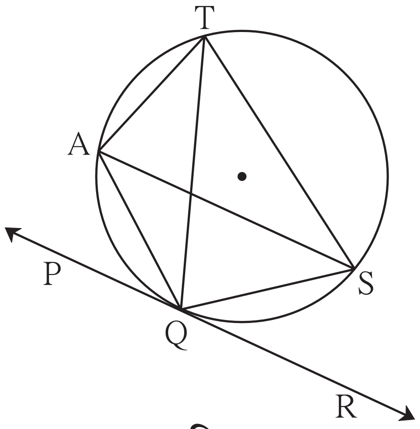
10★. आकृति 3.90 में, रेख AB बिंदु C केंद्रवाले वृत्त का व्यास है । वृत्त की स्पर्श रेखा PQ वृत्त को बिंदु T पर स्पर्श करती है ।
रेख AP $\perp$ रेखा PQ और रेख BQ $\perp$ रेखा PQ तो सिद्‌ध कीजिए कि, रेख CP $\cong$ रेख CQ.



आकृति 3.90

11★. 3 सेमी त्रिज्या तथा बिंदु A, B तथा C केंद्रवाले वृत्तों की रचना इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक वृत्त अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता हो ।

12★. सिद्‌ध कीजिए कि वृत्त के कोई भी तीन बिंदु एक रैखिक नहीं होते ।



आकृति 3.91

13. आकृति 3.91 में, रेखा PR वृत्त को Q बिंदु पर स्पर्श करती है । आकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) $\angle$TAQ और $\angle$ TSQ के मापों का योगफल कितना होगा ?

(2) $\angle$AQP के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए ।

(3) $\angle$QTS के सर्वांगसम कोण का नाम बताइए ।

(4) यदि $\angle TAS = 65°$, तो $\angle$TQS और चाप TS के माप बताइए ।

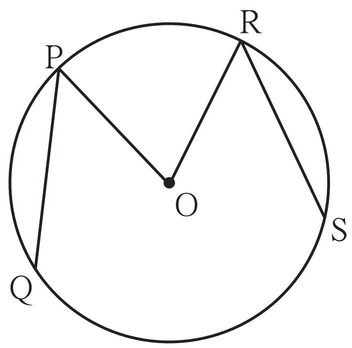
(5) यदि $\angle AQP = 42°$ और $\angle SQR = 58°$, तो $\angle$ATS के माप ज्ञात कीजिए ।

14. संलग्न आकृति में, O केंद्रवाले वृत्त में रेख PQ तथा रेख RS सर्वांगसम जीवा हैं । यदि $\angle$ POR = 70° तथा m(चाप RS) = 80°, तो –

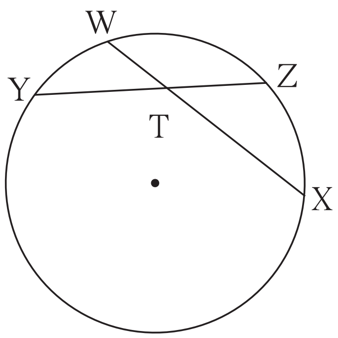
(1) m(चाप PR) कितना ?

(2) m(चाप QS) कितना ?

(3) m(चाप QSR) कितना ?



आकृति 3.92



आकृति 3.93

15. आकृति 3.93 में, m(चाप WY) = 44°, m(चाप ZX) = 68°, तो

(1) $\angle$ZTX का माप ज्ञात कीजिए।

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 तो TZ = कितना ?

(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तो WT = कितना ?

16. आकृति 3.94 में,

(1) m(चाप CE) = 54°,

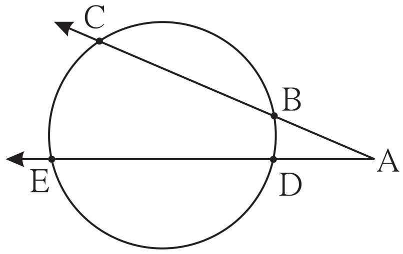
m(चाप BD) = 23°, तो ∠CAE = कितना ?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 तो AD = कितना ?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 तो AE = कितना ?



आकृति 3.94

17. संलग्न आकृति में, जीवा EF || जीवा GH तो सिद्ध कीजिए कि, जीवा EG ≅ जीवा FH

नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर उपपत्ति पूर्ण कीजिए ।

उपपत्ति : रेख GF खींचिए ।

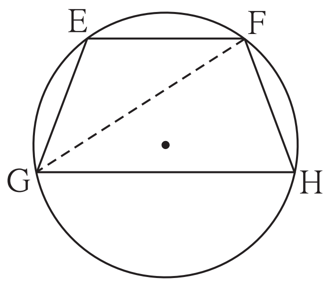
∠ EFG = ∠ FGH .... $\boxed{\qquad}$ (I)

∠ EFG = $\boxed{\qquad}$ (अंतर्लिखित कोण के प्रमेय से) (II)

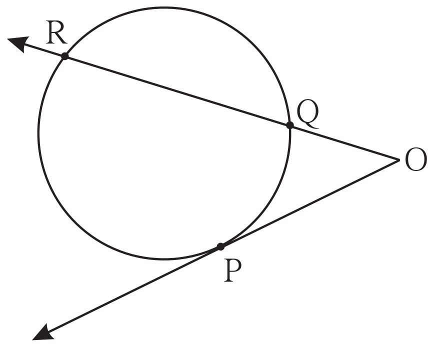
∠ FGH = $\boxed{\qquad}$ (अंतर्लिखित कोण के प्रमेय से)(III)

∴ m (चाप EG) = $\boxed{\qquad}$ [(I), (II) तथा (III) से]

जीवा EG ≅ जीवा FH .... ($\boxed{\qquad}$)



आकृति 3.95



आकृति 3.96

18. संलग्न आकृति में बिंदु P एक स्पर्श बिंदु है ।

(1) m(चाप PR) = 140°,

∠ POR = 36° तो

m(चाप PQ) = कितना ?

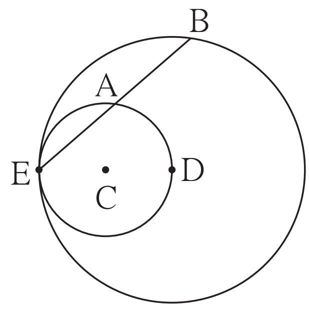
(2) OP = 7.2, OQ = 3.2, तो

OR तथा QR ज्ञात कीजिए ।

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, तो

QR का मान कितना ?

19. संलग्न आकृति में, C केंद्रवाला वृत्त D केंद्रवाले वृत्त को E बिंदु पर अंतःस्पर्श करता है । बिंदु D अंतःवृत्त पर है । बाह्य वृत्त की जीवा EB अंतःवृत्त को A बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है । सिद्ध कीजिए, कि रेख EA ≅ रेख AB

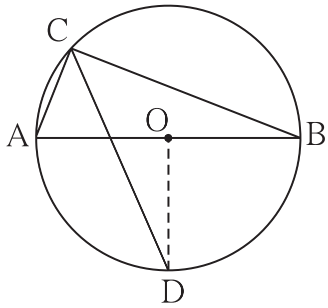


आकृति 3.97

20. आकृति 3.98 में, रेख AB बिंदु O केंद्रवाले वृत्त का व्यास है। अंतर्लिखित $\angle$ ACB का समद्विभाजक वृत्त को D बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि

रेख AD $\cong$ रेख BD ।

नीचे दी गई उपपत्ति में रिक्त स्थान की पूर्ति कर पूर्ण कीजिए ।



आकृति 3.98

उपपत्ति : रेख OD खींचिए।

$\angle$ ACB = $\boxed{}$ (अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण)

$\angle$ DCB = $\boxed{}$ (रेख CD, $\angle$ C का समद्विभाजक है)

m(चाप DB) = $\boxed{}$ (अंतर्लिखित कोण का प्रमेय)

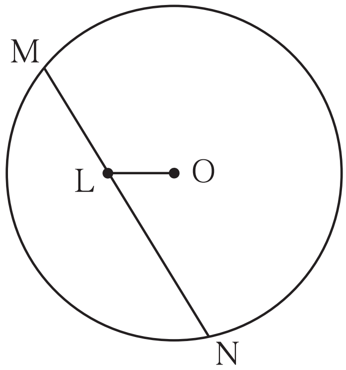
$\angle$ DOB = $\boxed{}$ (चाप के माप की परिभाषा) (I)

रेख OA $\cong$ रेख OB.......... ($\boxed{}$) (II)

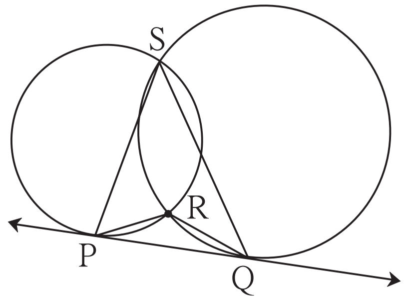
$\therefore$ रेखा OD रेख AB की $\boxed{}$ रेखा है। (I) तथा (II) से

$\therefore$ रेख AD $\cong$ रेख BD

21. संलग्न आकृति 3.99 में रेख MN 'O' केंद्रवाले वृत्त की जीवा है । MN = 25, जीवा MN पर बिंदु L इस प्रकार है कि, ML = 9 और d(O, L) = 5 तो इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।



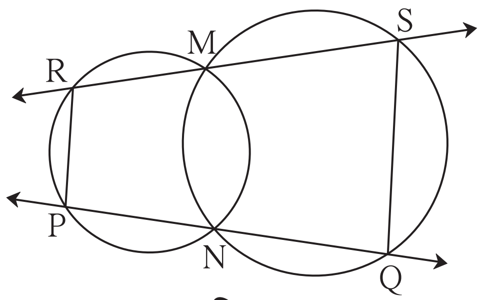
आकृति 3.99



आकृति 3.100

22*. आकृति 3.100 में दो वृत्त परस्पर बिंदु S तथा बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करते हैं । रेखा PQ उन वृत्तों की सामान्य स्पर्श रेखा है जो उन्हे बिंदु P तथा Q पर स्पर्श करती है । सिद्ध कीजिए कि –

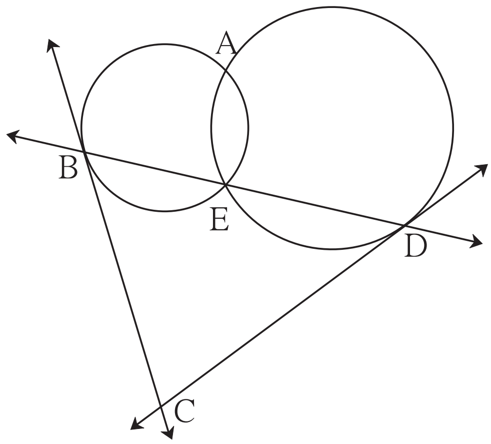
$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180°



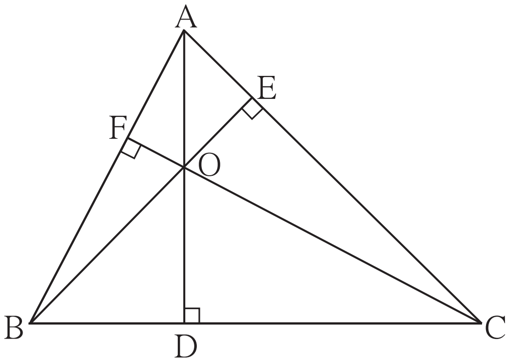
आकृति 3.101

23★. आकृति 3.101 में, दो वृत्त एक दूसरे को बिंदु M तथा N पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि बिंदु M तथा N से खींची गई वृत्त की छेदन रेखाएँ वृत्तों के क्रमशः बिंदु R तथा S पर तथा बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती हों तो सिद्ध कीजिए कि PR || QS

24★. दो वृत्त परस्पर बिंदु A तथा बिंदु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं। बिंदु E से खींची गई सामान्य छेदन रेखा वृत्तों को बिंदु B तथा बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है। बिंदु B तथा बिंदु D से खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर बिंदु C पर प्रतिच्छेदित करती हैं। सिद्ध कीजिए कि, □ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।



आकृति 3.102



आकृति 3.103

25★. Δ ABC में, रेख AD $\perp$ भुजा BC, रेख BE $\perp$ भुजा AC, रेख CF $\perp$ भुजा AB। बिंदु 'O' लंबपाद हो तो सिद्ध कीजिए कि, बिंदु 'O' Δ DEF का अंतःकेंद्र है।

ICT Tools or Links

जिओजेब्रा की सहायता से विविध वृत्त खींचिए।
उसमें जीवा तथा स्पर्श रेखा खींचकर गुणधर्म की जाँच कीजिए।

PFN3N6

4 भूमितीय रचनाएँ

आओ सीखें

- समरूप त्रिभुजों की रचना
  - ✻ दो समरूप त्रिभुजों में से किसी एक त्रिभुज की भुजाएँ और दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं का अनुपात दिया गया हो तो दूसरे की रचना करना ।
    - (i) एक भी शीर्षबिंदु सामान्य न होने पर ।
    - (ii) एक शीर्षबिंदु सामान्य होने पर ।
- वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना
  - ✻ वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना ।
    - (i) वृत्त के केंद्र का उपयोग करते हुए ।
    - (ii) वृत्त के केंद्र का उपयोग न करते हुए ।
  - ✻ वृत्त के बाह्य बिंदु से उस वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना ।

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हम नीचे दी गई रचना का अध्ययन कर चुके हैं । अब इन रचनाओं का पुनरावर्तन कीजिए ।

- दी गई रेखा के बाहर स्थित बिंदु से रेखा के समांतर रेखा खींचना ।
- दी गई रेखा का लंब समद्विभाजक खींचना ।
- त्रिभुज की भुजा तथा कोण में से पर्याप्त घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दी गई संख्या के आधार पर समान भाग करना ।
- दिए गए रेखाखंड का दिए गए अनुपात में विभाजन करना ।
- दिए गए कोण के सर्वांगसम कोण की रचना करना ।

कक्षा नौवीं में आपने परिसर का मानचित्र बनाने का उपक्रम किया है । किसी इमारत को बनाने के पूर्व उस इमारत की रूपरेखा तैयार करते हैं । विद्यालय का परिसर और उसका मानचित्र, इमारत और उसकी रूपरेखा परस्पर समरूप होते हैं । भूगोल, वास्तुशास्त्र, यंत्रशास्त्र आदि क्षेत्रों में समरूप आकृतियों को बनाने की आवश्यकता होती है । त्रिभुज सबसे सरल बंद आकृति है । इसलिए दिए गए त्रिभुजों के समरूप त्रिभुज कैसे बनाए जाते हैं, इसे देखेंगे ।

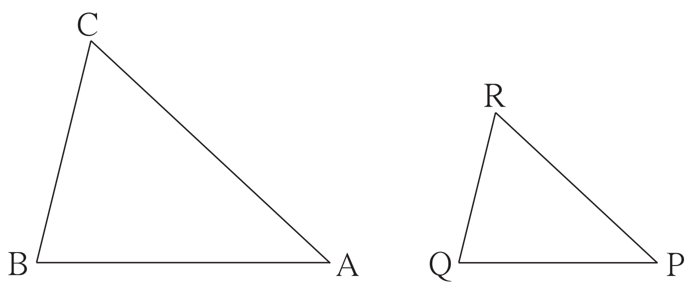
आओ जानें

समरूप त्रिभुजों की रचना

किसी त्रिभुज की भुजाएँ दी गई हों, तो उसके समरूप एवं अनुपात की शर्त पूरी करने वाले त्रिभुज की रचना करना ।

दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं और उनके संगत कोण सर्वांगसम होते हैं । इस कथन का उपयोग करके दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना की जा सकती है ।

उदा. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC में AB = 5.4 सेमी, BC = 4.2 सेमी, AC = 6.0 सेमी । AB: PQ = 3:2 तो Δ ABC और Δ PQR की रचना कीजिए ।



आकृति 4.1
कच्ची आकृति

सर्वप्रथम दिए गए माप के अनुसार Δ ABC की रचना कीजिए ।

Δ ABC और Δ PQR समरूप हैं ।

$\therefore$ उनकी संगत भुजाएँ समानुपात में हैं ।

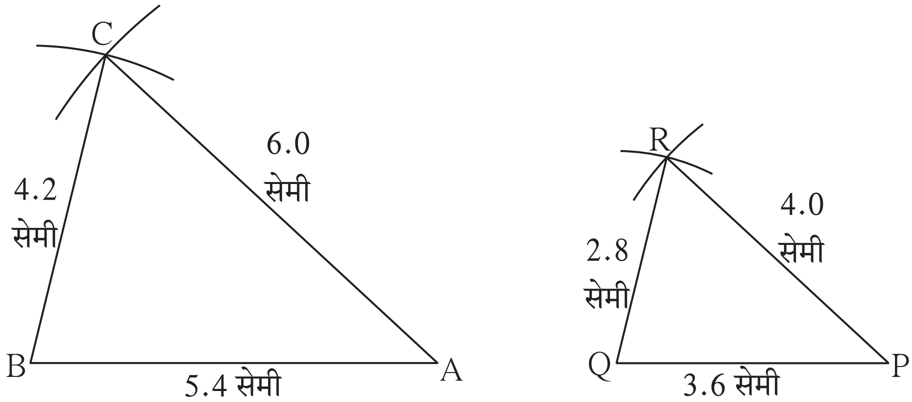
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

AB, BC, AC इन भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर उपर्युक्त समीकरण से PQ, QR, PR भुजाओं की लंबाई प्राप्त होगी ।

समीकरण [I] से

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 सेमी, QR = 2.8 सेमी और PR = 4.0 सेमी



आकृति 4.2

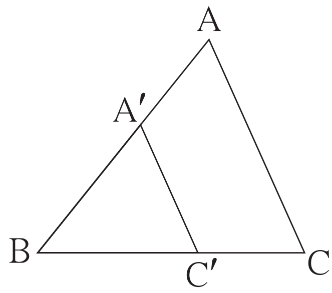
Δ PQR की सभी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर हम उस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं ।

अधिक जानकारी हेतू :

कई बार दिए गए त्रिभुज के समरूप रचना किए जाने वाले त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई मापन पट्टी से मापन संभव नहीं होता । ऐसे समय दिए गए रेखाखंड के 'दिए गए संख्यानुसार समान भाग करना' इस रचना का उपयोग कर त्रिभुज की भुजा ज्ञात कर सकते हैं ।

उदाहरणार्थ, भुजा AB की लंबाई $\frac{11.6}{3}$ सेमी हो, तो 11.6 सेमी लंबाई वाले रेखाखंड के 3 समान भाग कर रेख AB ज्ञात कर सकते हैं ।

उपर्युक्त उदा. (1) में रचना में दिए गए तथा खींचे जाने वाले त्रिभुजों में सामान्य शीर्ष बिंदु नहीं होता । एक शीर्ष बिंदु सामान्य हो तो त्रिभुज की रचना दिए गए उदाहरण में दर्शाए अनुसार करना सुविधाजनक होता है ।



आकृति 4.3

कच्ची आकृति

उदा.(2) एक Δ ABC की रचना कीजिए ।

Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ की रचना ऐसे कीजिए कि

AB : A′B = 5:3

स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A′, A की तरह ही बिंदु B, C′, C लीजिए ।

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ $\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC'$

$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Δ ABC की भुजाएँ Δ A′BC′ की संगत भुजाओं से बड़ी होगी ।

$\therefore$ रेख BC के 5 समान भाग करने पर उसके तीन समान भाग के बराबर रेख BC′ की लंबाई होगी ।

Δ ABC खींचकर रेख BC पर बिंदु B से तीन भाग के बराबर दूरी पर बिंदु C′ होना चाहिए । बिंदु C′ से रेख AC के समांतर खींची गई रेखा, रेख BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करेगी वह बिंदु A′ होगा ।

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ अर्थात, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \text{ .... विपर्य स्थानुपात से}$$

रचना के सोपान :

(1) किसी Δ ABC की रचना कीजिए ।

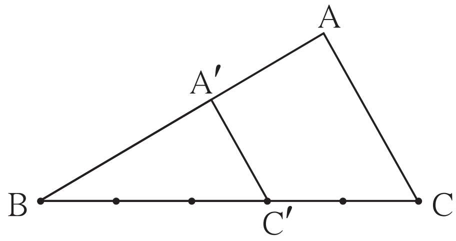
(2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए ।

(3) बिंदु B से तीसरे बिंदु को C′ नाम दीजिए ।

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

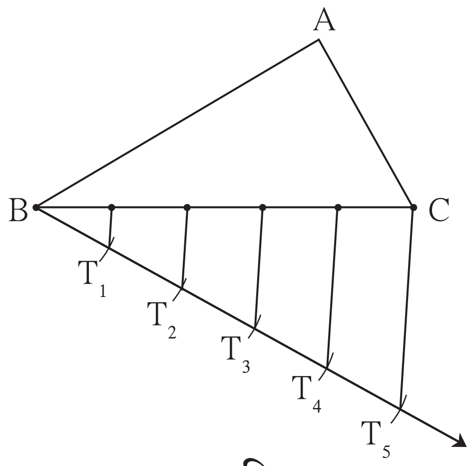
(4) अब C′ से रेख CA के समांतर रेखा खींचिए । यह रेख AB को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A′ नाम दीजिए ।

(5) Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ यही अभीष्ट त्रिभुज है ।



आकृति 4.4

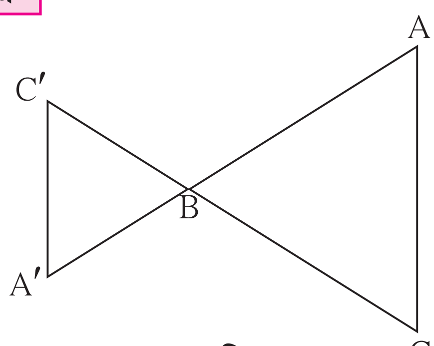
टीप : रेख BC के पाँच समान भाग करने पर, रेख BC के जिस ओर बिंदु A है उसके विपरीत ओर बिंदु B से एक किरण खींचकर उसे विभाजित करना सुविधाजनक होता है । उस किरण पर $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ ऐसे समान भाग लीजिए । T_5C जोड़े तथा T_1, T_2, T_3, T_4 से T_5C के समांतर रेखा खींचिए ।



आकृति 4.5

थोड़ा सोचें

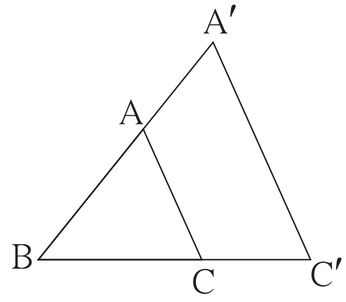
समरूप त्रिभुज की रचना करने के लिए संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार Δ A′BC′ खींच सकते हैं ।
इस आकृति के अनुसार Δ A′BC′ की रचना करनी हो तो रचना के सोपान में कौन-सा बदलाव करना होगा ?



आकृति 4.6

उदा.(3) Δ ABC के समरूप Δ A′BC′ की रचना इस प्रकार कीजिए कि AB : A′B = 5:7

स्पष्टीकरण : एकरेखीय बिंदु B, A, A′ की तरह ही बिंदु B, C, C′ लीजिए ।



आकृति 4.7

कच्ची आकृति

Δ ABC ~ Δ A′BC′ और AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC की भुजा Δ A′BC′ की संगत भुजाओं से छोटी होगी

उसी प्रकार $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

इस मुद्दे को ध्यान में रखकर कच्ची आकृति बनाएँ ।

अब $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ रेख BC के 5 समान भाग करे तो उनमें से किसी एक भाग का 7 गुना रेख BC′ की लंबाई होगी ।

$\therefore$ Δ ABC खींचकर रेख BC के पाँच समान भाग करें । बिंदु C′ किरण BC पर बिंदु B से सात भाग की दूरी पर होगा ।

समानुपात के मूलभूत प्रमेय के अनुसार बिंदु C′ से भुजा AC के समांतर रेखा खींचें तो वह बढ़ी हुई किरण BA को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, वह बिंदु A′ होगा । रेख A′C′ खींचने पर Δ A′BC′ अभीष्ट (अपेक्षित) त्रिभुज प्राप्त होगा ।

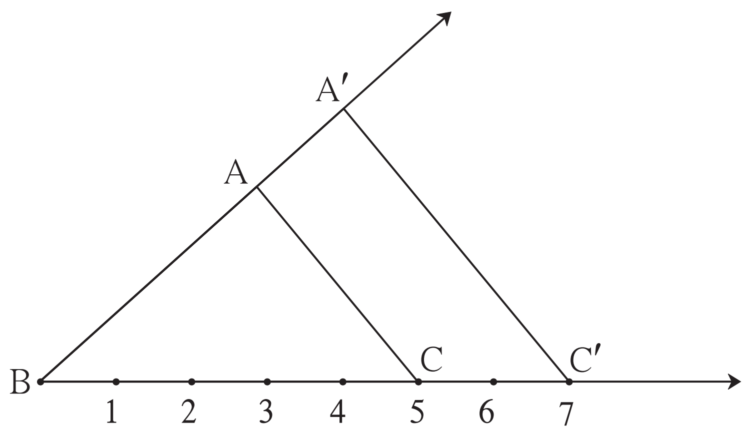
रचना के सोपान :

(1) Δ ABC बनाइए ।

(2) रेख BC के पाँच समान भाग कीजिए । किरण BC पर बिंदु C′ इस प्रकार लें, कि रेख BC′ की लंबाई रेख BC के एक भाग की सात गुना हो ।

(3) रेख AC के C′ से समांतर रेखा खींचिए । यह रेखा किरण BA को जहाँ प्रतिच्छेदित करती है, उस बिंदु को A′ नाम दीजिए ।

Δ A′BC′ यह Δ ABC के समरूप अभीष्ट त्रिभुज है ।



आकृति 4.8

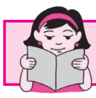
प्रश्नसंग्रह 4.1

1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC में AB = 5.5 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4.5 सेमी और $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ तो Δ ABC तथा Δ LMN की रचना कीजिए।

2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR में PQ = 4.2 सेमी, QR = 5.4 सेमी, PR = 4.8 सेमी और $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ तो Δ PQR तथा Δ LTR की रचना कीजिए।

3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST में RS = 4.5 सेमी, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 सेमी और $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ तो Δ RST तथा Δ XYZ की रचना कीजिए।

4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT में AM = 6.3 सेमी, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 सेमी और $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ तो Δ AHE की रचना कीजिए।

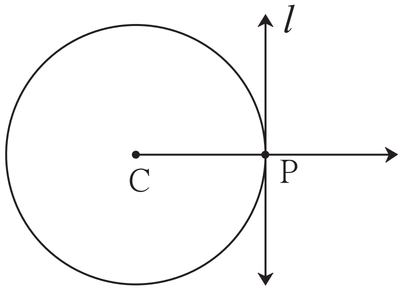


आओ जानें

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्शरेखा खींचना

(i) वृत्त केंद्र का उपयोग करते हुए :

स्पष्टीकरण :



आकृति 4.9

माना C केंद्रवाले वृत्तपर स्थित बिंदु P से जानेवाली, स्पर्श रेखा l खींचना है।

त्रिज्या के बाह्य छोर से खींची गई लंब रेखा उस वृत्त की स्पर्श रेखा होती है, इस गुणधर्म का उपयोग कीजिए। त्रिज्या CP खींची तो रेख CP $\perp$ रेखा l अर्थात त्रिज्या CP पर बिंदु P से जाने वाली लंब रेखा ही अभीष्ट स्पर्शरेखा होगी।

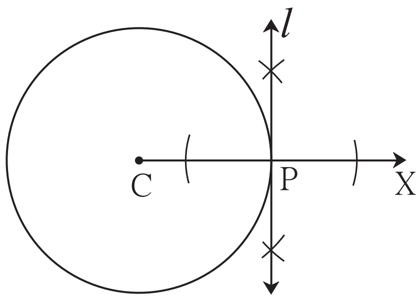
रेखा पर दी गई बिंदु से जाने वाली, उस रेखा पर लंब रेखा की रचना यहाँ करनी पड़ेगी। इसलिए सुविधा के लिए किरण CP खींचकर रेखा l की रचना करें।

रचना के सोपान :

(1) C केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए, उसपर एक बिंदु P लीजिए।

(2) किरण CP खींचिए।

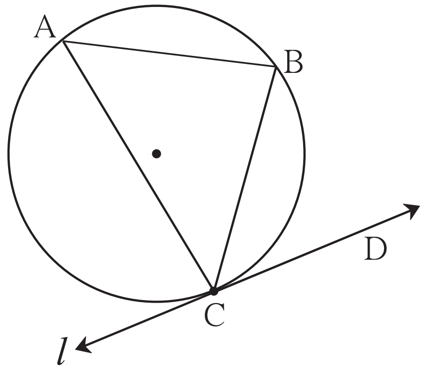
(3) बिंदु P से किरण CX पर लंब रेखा l खींचिए। रेखा l, बिंदु P से जानेवाली वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखा है।



आकृति 4.10

(ii) वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए :

उदाहरण : उचित त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए, उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए। वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए बिंदु C से होकर जाने वाली उस वृत्त की स्पर्शरेखा खींचिए।



आकृति 4.11

स्पष्टीकरण :

माना आकृति में दर्शाए अनुसार रेखा l बिंदु C से जाने वाली स्पर्श रेखा है। रेख CB जीवा और $\angle$ CAB अंतर्लिखित कोण खींचिए। स्पर्श रेखा छेदन रेखा कोण प्रमेय के अनुसार $\angle CAB \cong \angle BCD$।

स्पर्श रेखा-छेदन रेखा कोण प्रमेय के विलोम अनुसार,

यदि $\angle CAB \cong \angle BCD$, तो रेखा l यह वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

अर्थात रेख CB वृत्त की जीवा और $\angle CAB$ अंतर्लिखित कोण खींचिए। $\angle BCD$ की रचना इस प्रकार करें कि, $\angle BCD \cong \angle BAC$

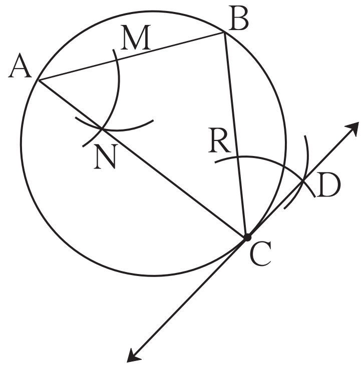
रेखा CD यह दिए गए वृत्त के बिंदु C से जाने वाली उस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

रचना के सोपान :

(1) एक वृत्त खींचकर उसपर कोई एक बिंदु C लीजिए।

(2) जीवा CB और अंतर्लिखित $\angle CAB$ खींचिए।

(3) बिंदु A केंद्र तथा उचित (सुविधाजनक) त्रिज्या लेकर $\angle BAC$ की भुजाओं को बिंदु M तथा बिंदु N पर प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए।



आकृति 4.12

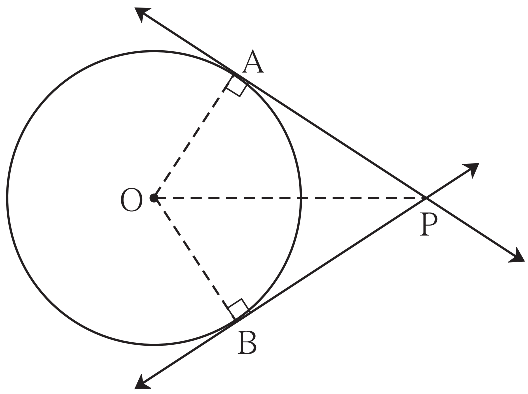
(4) वही त्रिज्या तथा बिंदु C को केंद्र मानकर जीवा CB को प्रतिच्छेदित करने वाला चाप खींचिए उस प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दीजिए।

(5) कंपास में MN के बराबर त्रिज्या लीजिए। केंद्र R लेकर पहले खींचे गए चाप को प्रतिच्छेदित करने वाला एक और चाप खींचिए। उस प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए। रेखा CD खींचिए। रेखा CD यह वृत्त की स्पर्श रेखा है।

(उपर्युक्त आकृति में $\angle$ MAN $\cong \angle$ BCD के कारण को ध्यान में रखिए। रेखाखंड MN तथा रेखाखंड RD खींचने पर - भु भु भु कसौटी के अनुसार Δ MAN $\cong \Delta$ RCD. $\therefore \angle$ MAN $\cong \angle$ BCD)

वृत्त के बाह्य भाग में स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचना

स्पष्टीकरण :



आकृति 4.13

माना, आकृति में दर्शाए अनुसार 'O' केंद्रवाले वृत्त के बाह्यभाग में एक बिंदु P स्थित है । बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त को बिंदु A तथा बिंदु B पर स्पर्श करती है । वृत्त पर बिंदु A तथा बिंदु B का स्थान निश्चित हो जाने पर स्पर्श रेखा PA और PB खींची जा सकती है । क्योंकि त्रिज्या OA और OB खींचा तो त्रिज्या OA $\perp$ रेखा PA और त्रिज्या OB $\perp$ रेखा PB.

समकोण Δ OAP तथा Δ OBP में, OP यह दोनों त्रिभुज के कर्ण हैं । यदि रेख OP व्यास वाला वृत्त खींचा तो वह O केंद्रवाले वृत्त को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेंगे वे बिंदु A और B होंगे, क्योंकि अर्धवृत्त में अंतर्लिखित कोण समकोण होता है ।

रचना के सोपान :

(1) 'O' केंद्र तथा उचित माप की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए ।

(2) वृत्त के बाहर एक बिंदु P लीजिए ।

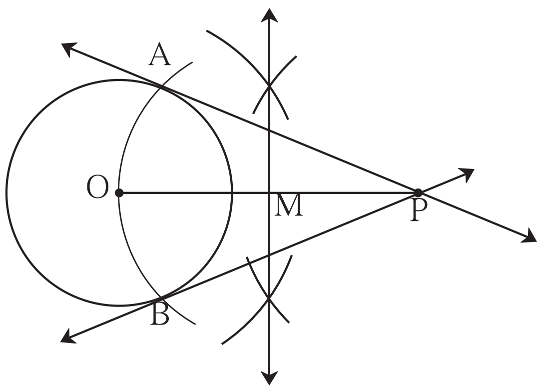
(3) रेख OP खींचिए । रेख OP का लंब समद्विभाजक खींचकर मध्य बिंदु M प्राप्त कीजिए ।

(4) केंद्र M तथा त्रिज्या OM लेकर वृत्त चाप बनाइए ।

(5) यह वृत्त चाप दिए गए वृत्त को बिंदु A और बिंदु B पर प्रतिच्छेदित करेगा ।

(6) रेखा PA तथा रेखा PB खींचिए ।

रेखा PA तथा रेखा PB वृत्त की अभीष्ट स्पर्शरेखाएँ हैं ।



आकृति 4.14

प्रश्नसंग्रह 4.2

1. बिंदु P केंद्र और त्रिज्या 3.2 सेमी लेकर वृत्त पर स्थित बिंदु M से जानेवाली स्पर्शरेखा खींचिए ।
2. 2.7 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त बनाइए । इस वृत्त पर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्शरेखा खींचिए ।
3. 3.6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त केंद्र का उपयोग न करते हुए वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।
4. 3.3 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त बनाइए । वृत्त में 6.6 सेमी लंबाई वाली एक जीवा PQ खींचिए । स्पर्श रेखा के संदर्भ में अपने निरीक्षण दर्ज कीजिए ।

5. 3.4 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । उसमें 5.7 सेमी लंबाई वाली जीवा MN खींचिए । बिंदु M तथा बिंदु N से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

6. केंद्र P तथा त्रिज्या 3.4 सेमी लेकर एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से 5.5 सेमी दूरी पर एक बिंदु Q लीजिए । Q से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

7. 4.1 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से 7.3 सेमी दूर स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा खींचिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. उचित विकल्प चुनिए :

(1) वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर खींची जा सकने वाली स्पर्शरेखाओं की संख्या .... होती है ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से उस वृत्त पर अधिक से अधिक .... स्पर्श रेखा खींची जा सकती है ।

(A) 2 (B) 1 (C) एक और केवल एक (D) 0

(3) यदि Δ ABC ~ Δ PQR , $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ तो ....

(A) Δ ABC बड़ा होगा (B) Δ PQR बड़ा होगा

(C) दोनों त्रिभुज समान होंगे (D) निश्चित नहीं कहा जा सकता

2. O केंद्र तथा 3.5 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त बनाइए । वृत्त के केंद्र से 5.7 सेमी दूरी पर एक बिंदु P लीजिए । बिंदु P से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

3. एक वृत्त खींचिए । वृत्त पर एक बिंदु A लेकर वृत्त के केंद्र का उपयोग किए बिना वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

4. 6.4 सेमी व्यासवाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त के केंद्र से वृत्त के माप के बराबर दूरी पर एक बिंदु R लीजिए । इस बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचिए ।

5. P केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए । 100° माप का एक लघु चाप AB खींचिए । बिंदु A तथा बिंदु B से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए ।

6. E केंद्र तथा 3.4 सेमी त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए । वृत्त पर एक बिंदु F लीजिए । बिंदु A इस प्रकार लीजिए कि E–F–A और FA = 4.1 सेमी । बिंदु A से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचिए ।

7. यदि Δ ABC ~ Δ LBN, Δ ABC में AB = 5.1 सेमी, $\angle$ B = 40°, BC = 4.8 सेमी, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ तो Δ ABC तथा Δ LBN की रचना कीजिए ।

8. Δ PYQ में, PY = 6.3 सेमी, YQ = 7.2 सेमी, PQ = 5.8 सेमी । त्रिभुज PQR के समरूप Δ XYZ की रचना इस प्रकार कीजिए कि, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$ हो ।

PFHYPT

5 निर्देशांक भूमिति

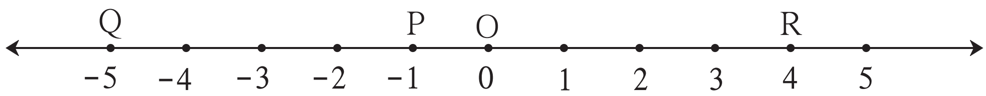
आओ सीखें

- दूरी सूत्र
- विभाजन सूत्र
- रेखा का ढाल

थोड़ा याद करें

हम संख्या रेखा पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी मापना जानते हैं ।

बिंदुओं P,Q और R के निर्देशांक क्रमश: $-1, -5$ और 4 हो तो रेख PQ,और रेख QR की दूरी ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.1

बिंदु A और B के निर्देशांक क्रमश: x_1 और x_2 हैं और $x_2 > x_1$ हो तो

रेखाखंड AB की दूरी = $d(A,B) = x_2 - x_1$

आकृति में दर्शाए अनुसार बिंदु P,Q और R के निर्देशांक क्रमश: $-1, -5$ और 4 हैं ।

$\therefore\ d(P, Q) = (-1)-(-5) = -1 + 5 = 4$

और $\quad d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

इसी संकल्पना का उपयोग करके हम प्रतल XY में स्थित तथा एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करेंगे ।

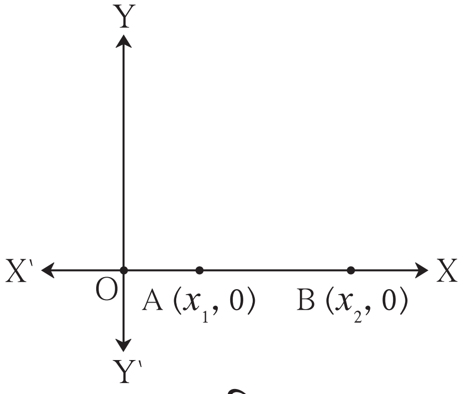
आओ जानें

(1) एक ही अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना :

एक ही अक्ष पर दो बिंदु अर्थात एक ही संख्या रेखा पर दो बिंदु । यह ध्यान में रखें कि X अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक $(2, 0)$, $(\frac{-5}{2}, 0)$, $(8, 0)$ हैं, और Y अक्ष पर स्थित बिंदुओं के निर्देशांक $(0, 1)$, $(0, \frac{17}{2})$ और $(0, -3)$ होते हैं ।

X अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OX' है तथा Y अक्ष का ऋण निर्देशांक दर्शाने वाला भाग किरण OY' है ।

(i) X-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।

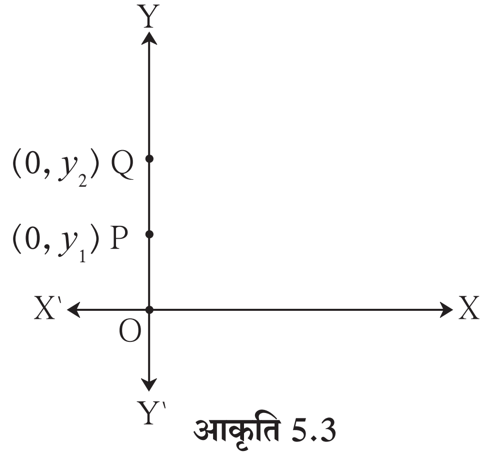


आकृति 5.2

उपर्युक्त आकृति में,
$A(x_1, 0)$ और $B(x_2, 0)$ ये दो बिंदु X- अक्ष पर इस प्रकार हैं कि, $x_2 > x_1$

$\therefore$ d(A, B) = $x_2 - x_1$

(ii) Y-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।

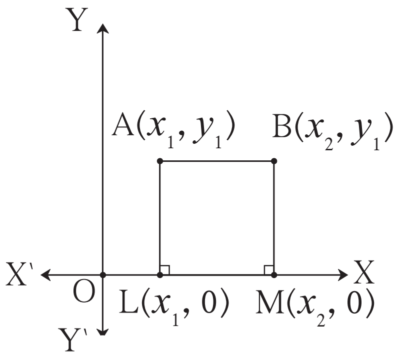


आकृति 5.3

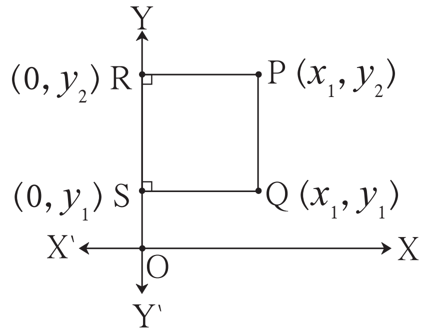
उपर्युक्त आकृति में,
$P(0, y_1)$ और $Q(0, y_2)$ ये दो बिंदु Y- अक्ष पर इस प्रकार हैं, $y_2 > y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

(2) दो बिंदुओं को जोड़ने वाले प्रतल XY पर स्थित रेखाखंड किसी एक अक्ष के समांतर हों तो उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना ।



आकृति 5.4



आकृति 5.5

(i) आकृति में रेख AB यह X- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु A तथा बिंदु B के y निर्देशांक समान हैं ।

X-अक्ष पर रेख AL और रेख BM लंब खींचिए।

$\therefore$ $\square$ ABML एक आयत है ।

$\therefore$ AB = LM

परंतु, LM = $x_2 - x_1$

$\therefore$ d(A,B) = $x_2 - x_1$

(ii) आकृति में रेख PQ यह Y- अक्ष के समांतर है । इसीलिए बिंदु P और बिंदु Q के x निर्देशांक समान हैं ।

Y-अक्ष पर रेख PR और रेख QS लंब खींचिए।

$\therefore$ $\square$ PQSR एक आयत है ।

$\therefore$ PQ = RS

परंतु, RS = $y_2 - y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

कृति :

आकृति में रेख AB || Y-अक्ष और रेख CB || X-अक्ष है। बिंदु A और C के निर्देशांक दिए गए हैं।

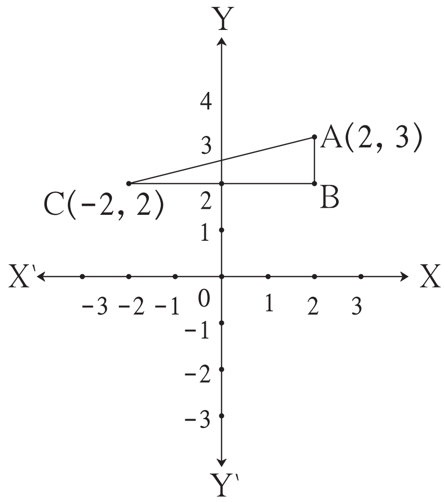
AC ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई चौखटों में लिखिए।

Δ ABC समकोण त्रिभुज है।

पायथागोरस के प्रमेयानुसार,

$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{\quad}$

AB और BC प्राप्त करने के लिए बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात करेंगे।



आकृति 5.6

CB || X- अक्ष $\therefore$ B का y निर्देशांक = $\boxed{\quad}$

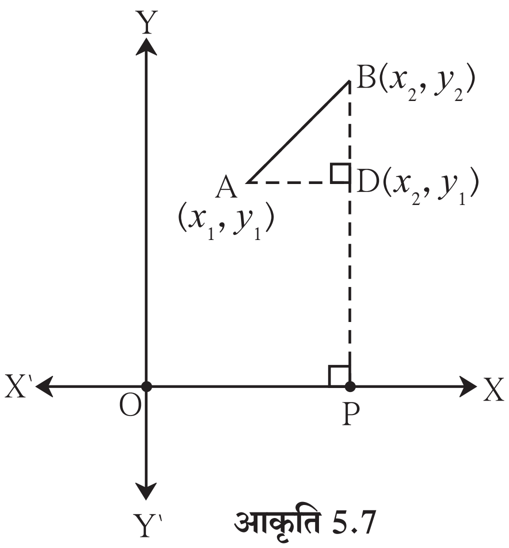
BA || Y- अक्ष $\therefore$ B का x निर्देशांक = $\boxed{\quad}$

AB = $\boxed{3} - \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ BC = $\boxed{\quad} - \boxed{\quad} = \boxed{4}$

$\therefore$ AC^2 = $\boxed{\quad} + \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ $\therefore$ AC = $\boxed{\sqrt{17}}$

आओ जानें

दूरी सूत्र (Distance formula)



आकृति 5.7

आकृति 5.7 में, A(x_1, y_1) और B(x_2, y_2) यह प्रतल XY पर स्थित कोई दो बिंदु हैं।

बिंदु B से X-अक्ष पर BP लंब खींचिए। उसी प्रकार बिंदु A से रेखा BP पर AD लंब खींचिए जो Y-अक्ष के समांतर हो।

$\therefore$ बिंदु D का x निर्देशांक x_2 है।

रेख AD यह X-अक्ष समांतर है।

$\therefore$ बिंदु D का y निर्देशांक y_1 है।

$\therefore$ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,

BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

समकोण Δ ABD में, पायथागोरस के प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इस निष्कर्ष को दूरी सूत्र कहते हैं।

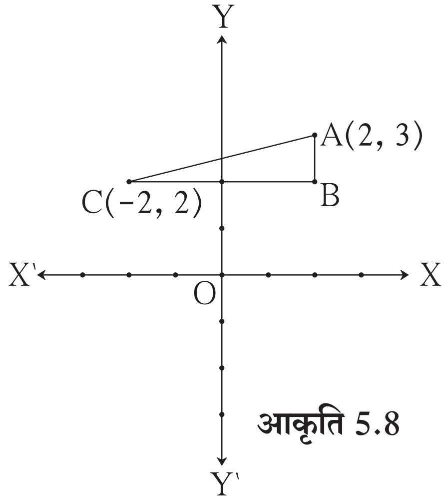
यह ध्यान में रखें कि, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

आकृति 5.6 की कृति में हमने रेख AC की लंबाई ज्ञात करने के लिए AB और BC की लंबाई ज्ञात कर पायथागोरस के प्रमेय का उपयोग किया था। अब दूरी-सूत्र की सहायता से हम उन रेखाखंडों की लंबाई ज्ञात करेंगे।

A(2, 3) और C(−2, 2) दिए गए हैं।

माना A(x_1, y_1) और C(x_2, y_2)

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$



आकृति 5.8

दूरी सूत्र से,

$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1}$$
$$= \sqrt{17}$$

रेखा AB || Y-अक्ष और रेखा BC || X-अक्ष

∴ बिंदु B का निर्देशांक (2, 2) है।

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

आकृति 5.1 में बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी (−1) − (−5) = 4; हमने ज्ञात किया था। इसी बिंदु के निर्देशांक प्रतल में (−1, 0) तथा (−5, 0) रहेंगे। दूरी सूत्र की सहायता से बिंदु P तथा बिंदु Q की दूरी उतनी ही रहेगी, इसकी जाँच कीजिए।

इसे ध्यान में रखें

- आरंभ बिंदु O के निर्देशांक (0, 0) होते हैं। अर्थात P के निर्देशांक (x, y) हो तो, d(O, P) = $\sqrt{x^2+y^2}$.
- P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) ये दोनों बिंदु प्रतल XY में स्थित हों तो

  d(P, Q) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  अर्थात, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) P(−1, 1), Q(5, −7) इन दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$

$x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

दूरी सूत्र के अनुसार $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2+[(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2+(-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} \quad = \quad 10$

$\therefore$ बिंदु P और Q के बीच की दूरी = 10

उदा. (2) सिद्‌ध कीजिए कि, A(−3, 2), B(1, −2) और C(9, −10) एकरेखीय बिंदु हैं ।

हल : यदि d(A, B); d(B, C) और d(A, C) इनमें से किन्हीं भी दो दूरियों का योगफल तीसरी दूरी के बराबर हो तो बिंदु A, B, C एकरेखीय होंगे ।

$\therefore$ d(A, B), d(B, C) और d(A, C) ज्ञात करेंगे ।

बिंदुA के निर्देशांक	बिंदु B के निर्देशांक	दूरी सूत्र
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2+[(-2)-2]^2}$ .... (दूरी सूत्रानुसार)

$= \sqrt{(1+3)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} \quad = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2+(-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} \quad = 8\sqrt{2}$ ....(II)

और $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2+(-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} \quad = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) और (III) से

$\therefore$ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

$\therefore$ A, B, C ये एकरेखीय बिंदु हैं ।

उदा. (3) निश्चित कीजिए कि क्या बिंदु P(6, -6), Q(3, -7) और R(3, 3) ये एकरेखीय बिंदु हैं ?

हल : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (दूरी सूत्र का उपयोग कर)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) और (III) से $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ और $\sqrt{90}$ में से $\sqrt{100}$ सबसे बड़ी संख्या है ।

संख्याएँ $\left(\sqrt{100}\right)$ और $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$ समान हैं या नहीं यह देखते हैं ।

इसके लिए $\left(\sqrt{100}\right)^2$ और $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ की तुलना करें ।

इससे ध्यना में आएगा कि $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right)$ $\therefore$ PQ + PR $\neq$ QR

$\therefore$ P(6, -6), Q(3, -7) और R(3, 3) यह एकरेखीय बिंदु नहीं है ।

उदा. (4) सिद्ध कीजिए कि, बिंदु (1, 7), (4, 2), (−1, −1) और (−4, 4) वर्ग के शीर्ष बिंदु हैं ।

हल : जब किसी चतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान लंबाई की और विकर्ण भी समान लंबाई के हों तो वह वर्ग होता हैं । $\therefore$ सभी भुजाओं और विकर्णों की लंबाई दूरी सूत्र का प्रयोग कर ज्ञात करेंगे ।

माना कि, A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) और D(−4,4) बिंदु दिए गए हैं ।

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

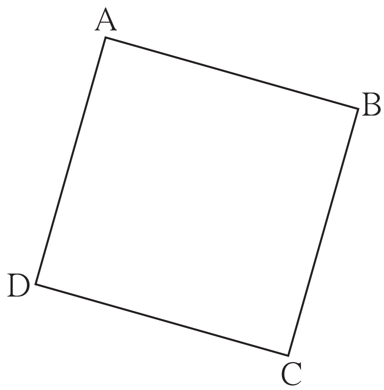
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



आकृति 5.9

$\therefore$ AB = BC = CD = DA और AC = BD

इस आधार पर हमें यह ज्ञात होता है कि, चारों भुजाएँ समान हैं और दोनों विकर्ण AC और BD भी समान हैं ।

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) और (−4,4) इन शीर्ष बिंदुओं से निर्मित चतुर्भुज वर्ग है ।

उदा. (5) Y− अक्ष पर स्थित ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो कि M (−5,−2) और N(3,2) से समान दूरी पर हो।

हल : माना, Y- अक्ष पर बिंदु $P(0, y)$ बिंदु M तथा N से समान दूरी पर है ।

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) और N (3, 2) इन बिंदुओं से समान दूरी पर स्थित Y− अक्ष के बिंदु का निर्देशांक (0, −2) है ।

उदा. (6) यदि बिंदु A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) यह Δ ABC के शीर्ष बिंदु है । तो Δ ABC के परिकेंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : माना बिंदु $P(a, b)$ यह Δ ABC का परिकेंद्र है। $\therefore$ बिंदु P बिंदु A, B, C से समान दूरी पर है।

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \;\ldots\ldots\ldots.\; (I) \qquad \therefore PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \;\ldots\ldots\ldots.\; (II)$$

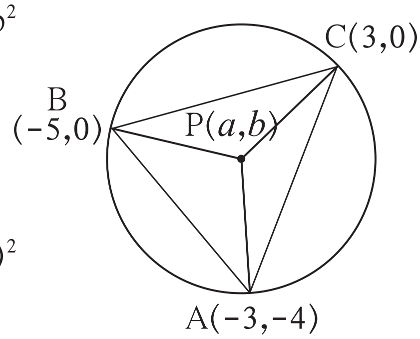
उसी प्रकार $PA^2 = PC^2$ .... (I) से

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \;\ldots\ldots\ldots.\; (III)$$



आकृति 5.10

समीकरण (II) और (III) हल करने पर $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ परिकेंद्र के निर्देशांक $(-1, -\frac{1}{2})$ हैं ।

उदा. (7) यदि बिंदु (x, y) यह $(7, 1)$ और $(3, 5)$ से समान दूरी पर हो, तो सिद्‌ध कीजिए कि $y = x-2$

हल : माना, P (x, y) यह बिंदु A(7, 1) और B(3, 5) से समान दूरी पर है ।

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

उदा. (8) बिंदु A $(2,-2)$ और बिंदु B $(-1, y)$ के बीच की दूरी 5 है, तो y का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... दूरी सूत्रानुसार

$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore 16 = (y+2)^2$

$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ या $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ या $y = -6$

$\therefore y$ का मान 2 या -6 है ।

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. निम्नलिखित प्रत्येक युग्म के बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।
   (1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S$(0, \frac{5}{2})$
   (4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W$(\frac{-7}{2}, 4)$, X(11, 4)
2. नीचे दिए गए बिंदु एकरेखीय हैं या नहीं ? इसकी जाँच कीजिए ।
   (1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (2) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)
   (3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)
3. X− अक्ष पर स्थित वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदु A(−3, 4) और B(1, −4) से समान दूरी पर हो ।
4. जाँच कीजिए कि बिंदु P(−2, 2), Q(2, 2) और R(2, 7) समकोण त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं ।

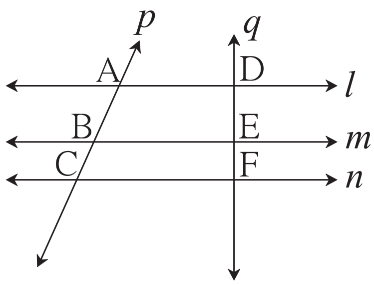
5. सिद्ध कीजिए कि, $P(2, -2)$, $Q(7, 3)$, $R(11, -1)$ और $S(6, -6)$ शीर्ष बिंदुवाला चर्तुभुज, समांतर चर्तुभुज है ।

6. सिद्ध कीजिए कि, $A(-4, -7)$, $B(-1, 2)$, $C(8, 5)$ और $D(5, -4)$ समचतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं ।

7. यदि बिंदु $L(x, 7)$ और $M(1, 15)$ के बीच की दूरी 10 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

8. सिद्ध कीजिए कि, $A(1, 2)$, $B(1, 6)$, $C(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिंदु हैं ।

थोड़ा याद करें



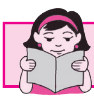
आकृति 5.11

तीन समांतर रेखाओं के अंत:खंडों का गुणधर्म :

आकृति में रेखा l || रेखा m || रेखा n,

रेखा p तथा रेखा q तिर्यक रेखाएँ हैं ।

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$



आओ जानें

रेखाखंडों का विभाजन (Division of a line segment)

आकृति 5.12

आकृति में, AP = 6 और PB = 10

$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

इसे भिन्न शब्दों में ‘बिंदु P रेखाखंड AB को 3:5 के अनुपात में विभाजित करता है ।’, ऐसा कहते हैं । जब किसी रेखाखंड पर स्थित बिंदु रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभाजित करता है तब उस विभाजक बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे यह देखते हैं ।

आओ जानें

विभाजन सूत्र (Section formula)

आकृति 5.13 में, प्रतल XY पर स्थित रेखाखंड AB पर बिंदु P, रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है ।

माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $P(x, y)$

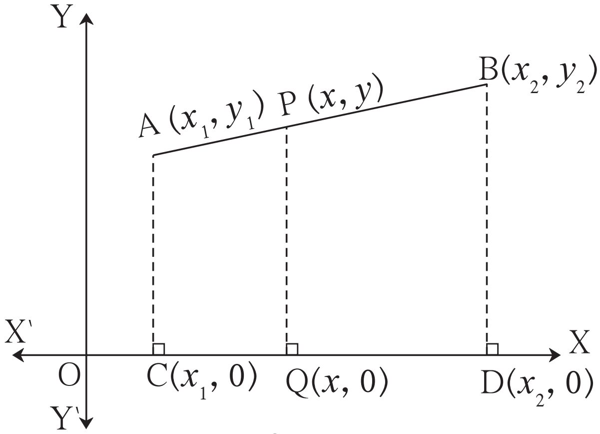
रेख AC, रेख PQ और रेख BD यह X–अक्ष पर लंब रेखाखंड खींचे गए हैं ।

$\therefore$ $C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$

और $D(x_2, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad CQ = x - x_1 \\ \text{और } QD = x_2 - x \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

उसी प्रकार रेख AC || रेख PQ || रेख BD.



आकृति 5.13

$\therefore$ तीन समांतर रेखाओं के अंत:खंडों के गुणधर्म के अनुसार, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

अब, $CQ = x - x_1$ और $QD = x_2 - x$ ……… (I) के अनुसार

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

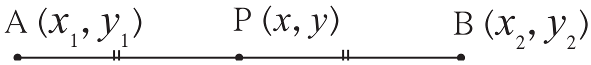
उसी प्रकार बिंदु A, P तथा B से Y– अक्ष पर लंब खींचकर उपर्युक्त दिए गए अनुसार कृति करने पर हमें $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ प्राप्त होगा ।

$\therefore$ बिंदु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ होते हैं ।

रेखाखंड के मध्यबिंदु का सूत्र (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ ये दो बिंदु हैं, और यदि बिंदु $P(x, y)$ रेखा AB का मध्य बिंदु हो तो

$m = n$



आकृति 5.14

अब विभाजन सूत्रानुसार,

x और y का मान लिखेगें ।

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ मध्य बिंदु P के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हैं । इसे ही रेखाखंड के **मध्यबिंदु का सूत्र** कहते हैं ।

हमने पिछली कक्षा में दो परिमेय संख्याएँ a और b को संख्या रेखा पर दर्शाकर, उनको जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु $\frac{a + b}{2}$ होता है यह दिखाया था । यह निष्कर्ष अभी प्राप्त सूत्र का एक विशेष प्रकार है, इसे ध्यान में रखिए ।

हल किए गए उदाहरण

उदा.(1) यदि बिंदु A(3,5) और बिंदु B(7,9) है और बिंदु Q यह रेखाखंड AB को 2:3 अनुपात में विभाजित करता हो, तो बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए उदाहरण में, माना $(x_1, y_1) = (3, 5)$

और $(x_2, y_2) = (7, 9)$

उसी प्रकार, $m : n = 2:3$

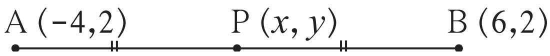
रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ बिंदु Q के निर्देशांक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

उदा.(2) A(−4,2), B(6,2) इस रेखाखंड का मध्य बिंदु P हो, तो P बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

हल :



आकृति 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ और बिंदु P के निर्देशांक (x, y)

$\therefore$ मध्य बिंदु के सूत्रानुसार,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ मध्य बिंदु P के निर्देशांक (1,2) प्राप्त होंगे ।

थोड़ा याद करें

हम जानते हैं कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं ।

संगामी बिंदु (centroid) माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

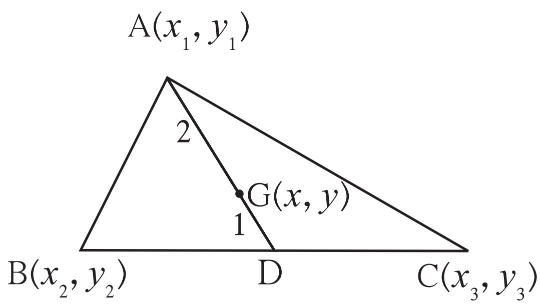
आओ जानें

केंद्रव बिंदु का सूत्र (माध्यिका संगामी बिंदु का सूत्र) (Centroid formula)

त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक दिए गए हों तो विभाजन सूत्र का उपयोग करके केंद्रव बिंदु के निर्देशांक कैसे प्राप्त कर सकते हैं । यह हम देखेंगे ।

माना, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ Δ ABC के शीर्ष बिंदु हैं । रेख AD Δ ABC की माध्यिका है । बिंदु $G(x, y)$ त्रिभुज का केंद्रव है ।

बिंदु D रेख BC का मध्य बिंदु है ।



आकृति 5.16

$\therefore$ बिंदु D के निर्देशांक $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$ .... रेखाखंड के मध्यबिंदु के सूत्रानुसार

बिंदु $G(x, y)$ यह Δ ABC की माध्यिकाओं का केंद्रव है । $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अर्थात, शीर्ष बिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) वाले त्रिभुज के केंद्रव के निर्देशांक

$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ होते हैं ।

इसे ही **केंद्रव (माध्यिकाओं के संगामी बिंदु) का सूत्र** कहते हैं ।

इसे ध्यान में रखें

- विभाजन सूत्र

  (x_1, y_1) और (x_2, y_2) इन दो भिन्न बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ होते हैं ।

- मध्य बिंदु का सूत्र

  (x_1, y_1) और (x_2, y_2) इन दो भिन्न बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होते हैं ।

- केंद्रव का सूत्र

  यदि (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) ये त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक हों तो केंद्रव का निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ होता है ।

उदा. (1) बिंदु A(−7,4) और बिंदु B(−6,−5) है। बिंदु T यह रेखाखंड AB को 7:2 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु T के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना, T का निर्देशांक (x, y) है।

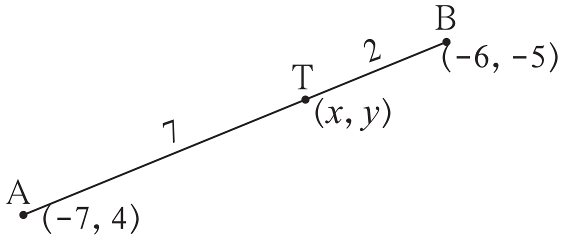
$\therefore$ रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$



आकृति 5.17

$\therefore$ बिंदु T का निर्देशांक $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ प्राप्त होगा।

उदा. (2) बिंदु P(−4, 6) यह बिंदु A(−6, 10) और बिंदु B(r, s) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है, तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : रेखाखंड के विभाजन सूत्रानुसार

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$\therefore$ $-4 = \frac{2r-6}{3}$

$\therefore$ $-12 = 2r - 6$

$\therefore$ $2r = -6$

$\therefore$ $r = -3$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$\therefore$ $6 = \frac{2s+10}{3}$

$\therefore$ $18 = 2s + 10$

$\therefore$ $2s = 8$

$\therefore$ $s = 4$

$\therefore$ बिंदु B के निर्देशांक (−3, 4) है।

उदा. (3) बिंदु A(15,5), B(9,20) और P(11,15) इस प्रकार हैं कि A−P−B तो ज्ञात कीजिए कि बिंदु P रेखाखंड AB को किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल : बिंदु P(11,15) रेखाखंड AB को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ विभाजन सूत्रानुसार,

$x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore\ 11 = \dfrac{9m+15n}{m+n}$

$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$

$\therefore\ 2m = 4n$

$\therefore\ \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1}$

$\therefore$ विभाजन अनुपात 2 : 1 है ।

इसी प्रकार y निर्देशांक का मान रखकर प्राप्त अनुपात कितना आएगा ? ज्ञात कीजिए और अपना निष्कर्ष लिखिए ।

उदा. (4) बिंदु A (2,−2) और B(−7,4) को जोड़ने वाले रेखाखंड को तीन समान भागों में विभाजित (सम त्रिभाजन) करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

(रेखाखंड के वे दो बिंदु जो रेखाखंड को तीन समान भागों में विभाजित करते हैं, उन्हें उस रेखाखंड के सम त्रिभाजक बिंदु कहते हैं ।)

हल : माना बिंदु P और Q ये बिंदु A और बिंदु B को जोड़ने वाले रेखाखंड के त्रिभाजक बिंदु हैं । अर्थात बिंदु P और Q के कारण रेखाखंड AB के तीन समान भाग होते हैं ।

AP = PQ = QB .... (I)

$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP}{PQ+QB} = \dfrac{AP}{AP+AP} = \dfrac{AP}{2AP} = \dfrac{1}{2}$ .... (I) से

बिंदु P रेखाखंड AB को 1:2 के अनुपात में विभाजित करता है ।

आकृति 5.18

P का x निर्देशांक $= \dfrac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \dfrac{-7+4}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$

P का y निर्देशांक $= \dfrac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \dfrac{4-4}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

उसी प्रकार बिंदु Q रेखाखंड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है । अर्थात $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{2}{1}$

Q का x निर्देशांक $= \dfrac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \dfrac{-14+2}{3} = \dfrac{-12}{3} = -4$

Q का y निर्देशांक $= \dfrac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \dfrac{8-2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

$\therefore$ रेखाखंड के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक (−1, 0), (−4, 2) है ।

अधिक जानकारी हेतू :

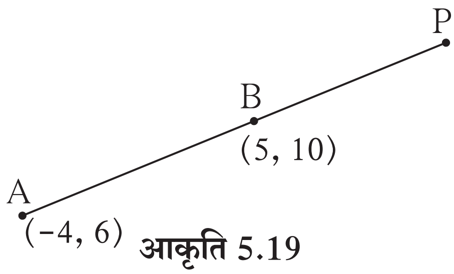
बिंदु A और B को जोड़ने वाले रेखाखंड का बाह्य विभाजन कैसे करते हैं ?

A(−4, 6), B(5, 10) ऐसे बिंदु हों तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु P के निर्देशांक कैसे प्राप्त करेंगे ? आइए देखें ।

$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1}$ अर्थात AP, PB से बड़ा है और A-B-P

$\frac{AP}{BP} = \frac{3}{1}$ अर्थात AP = 3k, BP = k, तो AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



आकृति 5.19

अब बिंदु B रेखाखंड AP को 2 : 1 इस अनुपात में विभाजित करता है ।

बिंदु A और बिंदु B के निर्देशांक दिए होने पर हमने बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात करना सीखा है ।

प्रश्नसंग्रह 5.2

1. यदि बिंदु P बिंदुओं A(−1,7) और B(4,−3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2 : 3 अनुपात में विभाजित करता हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

2. नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में रेखाखंड PQ को $a : b$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1

   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4

   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2

3. यदि P-T-Q है, तो बिंदु T(−1, 6), बिंदु P(−3, 10) और बिंदु Q(6, −8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है, ज्ञात कीजिए ।

4. रेखाखंड AB यह वृत्त का व्यास है, जिसका केंद्र बिंदु P है । A(2, −3) और P (−2, 0) हो तो बिंदु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5. बिंदु A(8, 9) और B(1, 2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को बिंदु P(k, 7) किस अनुपात में विभाजित करता है ज्ञात कीजिए और k का मान बताइए ।

6. (22, 20) और (0, 16) को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

7. नीचे त्रिभुज के शीर्ष बिंदु दिए हैं । प्रत्येक त्रिभुज के केंद्रव का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)

   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)

   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC में बिंदु G केंद्रव है, बिंदु A, B तथा G के निर्देशांक क्रमशः (–14, –19), (3, 5) और (–4, –7) हैं, तो बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

9. G (1, 5) केंद्रव वाले त्रिभुज के A (h, –6), B (2, 3) और C (–6, k) शीर्ष बिंदु हों तो h और k के मान ज्ञात कीजिए ।

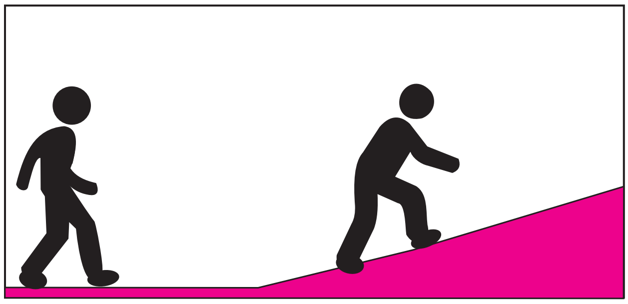
10. बिंदु A (2, 7) और B(–4, –8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

11. A (–14, –10), B(6, –2) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

12. A (20, 10), B(0, 20) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को पांच सर्वांगसम रेखाखंडों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

आओ जानें

रेखा का ढाल (Slope of a line)

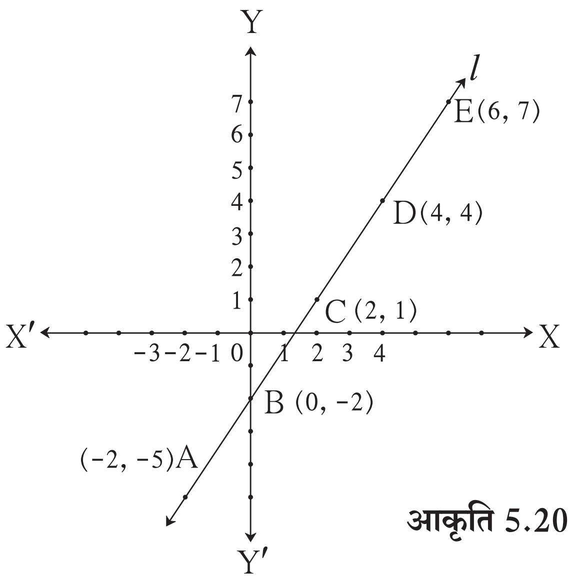


समतल जमीन पर चलते समय हमें परिश्रम नहीं करना पड़ता है । ऊँचाई (ढलान) पर चढ़ते समय थोड़ा परिश्रम करना पड़ता है । मनुष्य की साँस फूल सकती है । हमने विज्ञान में अध्ययन किया है कि ऊँचाई (ढलान) वाले रास्ते पर चढते समय गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध्‌ काम करना पड़ता है ।

प्रतलीय निर्देशांक भूमिति में रेखा का ढाल एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना है । नीचे दी गई कृति से इस संकल्पना को समझेंगे ।

कृति I :

संलग्न आकृति में A(–2, –5), B(0, –2), C(2, 1), D(4, 4), E(6, 7) यह बिंदु रेखा l पर स्थित है । इन निर्देशांकों का उपयोग कर के नीचे दी गई सारिणी का अवलोकन कीजिए ।



आकृति 5.20

अ. क्र.	प्रथम बिंदु	द्विवितीय बिंदु	प्रथम बिंदु के निर्देशांक (x_1, y_1)	द्विवितीय बिंदु के निर्देशांक (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कर सारिणी पूर्ण कीजिए । इसी प्रकार रेखा l पर स्थित अन्य जोडियाँ लेकर प्रत्येक युग्म के लिए अनुपात $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ज्ञात कीजिए ।

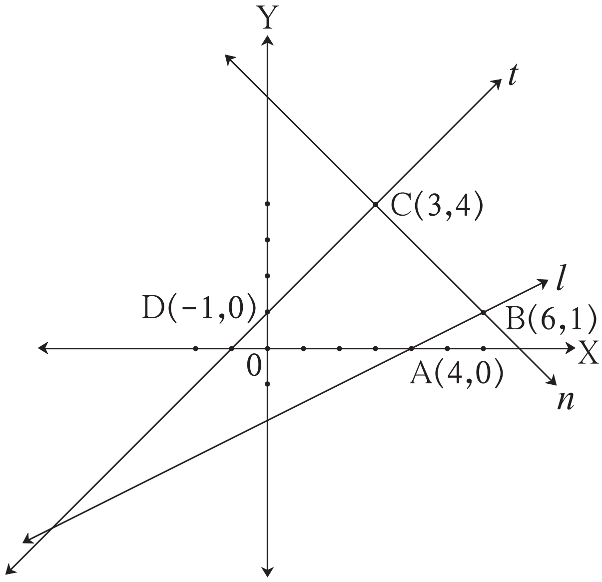
इस कृति से हमें यह ध्यान में आता है कि रेखा l के किसी भी दो बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के लिए $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ यह अनुपात स्थिर है ।

रेखा l पर (x_1, y_1) और (x_2, y_2) कोई भी दो बिंदु हों तो $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ इस अनुपात को रेखा का ढाल कहते हैं ।

रेखा के ढाल को सामान्य रूप से m अक्षर से दर्शाते हैं ।

$$\therefore \; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

कृति II : आकृति में रेखा l, t और n पर कुछ बिंदु दिए गए हैं । इस आधारपर उन रेखाओं के ढाल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 5.21

आपको पता होगा कि,

(1) रेखा l और रेखा t का ढाल धनात्मक है ।

(2) रेखा n का ढाल ऋणात्मक है ।

(3) रेखा t का ढाल रेखा l के ढाल से अधिक है ।

(4) X- अक्ष की धन दिशा की ओर बनने वाले न्यून कोण की रेखा l तथा रेखा t का ढाल धनात्मक है ।

(5) X- अक्ष की धन दिशा की ओर बने अधिक कोण वाली रेखा n का ढाल ऋणात्मक है ।

X–अक्ष, Y–अक्ष और अक्षों के समांतर रेखाओं के ढाल :

आकृति 5.22 में, $(x_1, 0)$ और $(x_2, 0)$ यह X- अक्ष के दो बिंदु है ।

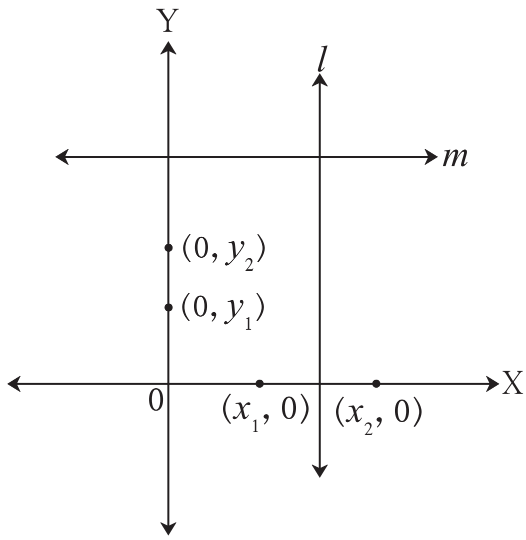
X- अक्ष का ढाल $= \dfrac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$

उसी प्रकार, $(0, y_1)$ और $(0, y_2)$ यह Y- अक्ष के दो बिंदु हैं ।

Y- अक्ष का ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{0-0} = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$,

परंतु 0 से किसी भी संख्या में भाग नही जाने से

Y- अक्ष के ढाल की गणना नहीं की जा सकती है ।



आकृति 5.22

उसी प्रकार रेखा m की तरह ही X- के समांतर किसी भी रेखा का ढाल ज्ञात करें, वह शून्य प्राप्त होगा ।

उसी प्रकार रेखा l की तरह ही Y- अक्ष के समांतर किसी रेखा का ढाल नहीं बताया जा सकता, ऐसा ज्ञात होगा।

रेखा का ढाल – त्रिकोणमिति के अनुपात का प्रयोग कर

आकृति 5.23 में, $P(x_1, y_1)$ और $Q\ (x_2, y_2)$ रेखा l पर स्थित दो बिंदु हैं ।

रेखा l यह X अक्ष को बिंदु T पर प्रतिच्छेदित करती है ।

रेखाखंड QS $\perp$ X- अक्ष, रेख PR $\perp$ रेख QS $\therefore$ रेख PR $\parallel$ रेख TS .... संगत कोण कसौटी

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ और PR $= x_2 - x_1$

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

रेखा TQ यह X- अक्ष के साथ θ कोण बनाती है ।

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

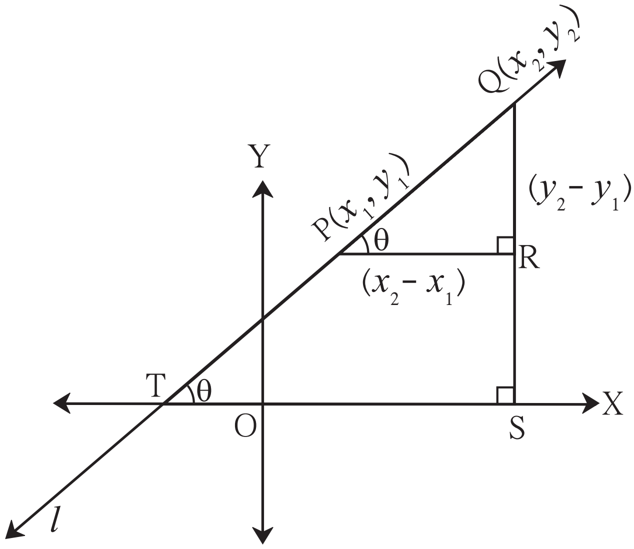
$\therefore$ (I) तथा (II) से, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

अब रेख PR || रेख TS और रेखा l उसकी तिर्यक रेखा है ।

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... संगत कोण

इस प्रकार, रेखा द्‌वारा X-अक्ष के धन दिशा में बनाए गए कोण का **टॅन** (tan) अनुपात ही उस रेखा का ढाल होता है । इस प्रकार भी ढाल की परिभाषा कर सकते हैं ।



आकृति 5.23

दो रेखाओं का ढाल जब समान होता है तब वे रेखाएँ X- अक्ष की धन दिशा में समान माप के कोण बनाती हैं ।

$\therefore$ वे दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

समांतर रेखाओं का ढाल (Slope of parallel lines)

कृति : आकृति 5.24 में रेखा l और रेखा t इन दोनों ही रेखाओं द्‌वारा X- अक्ष के धन दिशा में बना कोण θ है ।

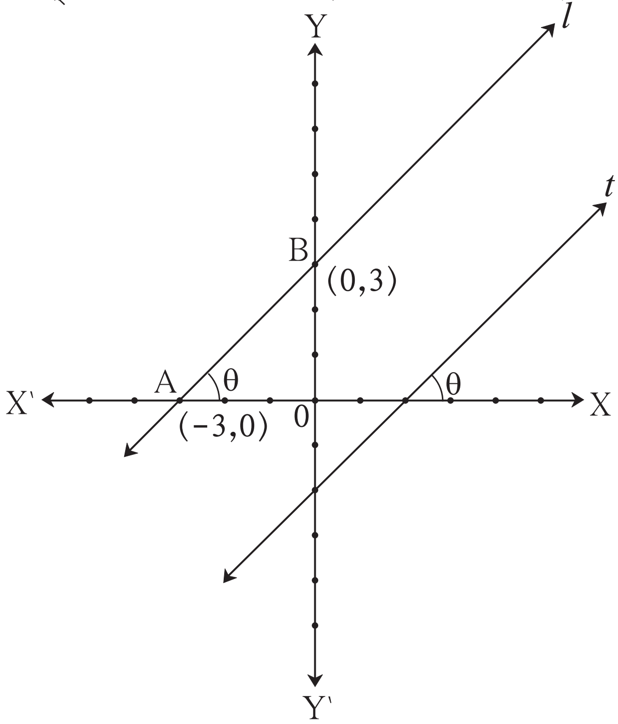
$\therefore$ रेखा l || रेखा t .... संगत कोण कसौटी

रेखा l पर बिंदु A(-3, 0) और बिंदु B(0, 3) का विचार कीजिए और रेखा AB का ढाल ज्ञात कीजिए ।

रेखा AB का ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \square$$



आकृति 5.24

उसी प्रकार t पर अपनी सुविधानुसार बिंदु लेकर उसका ढाल ज्ञात कीजिए ।

इस प्रकार समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच आप कर सकते हैं ।

यहाँ पर $\theta = 45^\circ$ है ।

ढाल, $m = \tan\theta$ का उपयोग कर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच करके देखिए ।

उसी प्रकार $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ मान लेकर समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं इसकी जाँच कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

X- अक्ष या X- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल शून्य होता है ।

Y- अक्ष या Y- अक्ष के समांतर रेखाओं का ढाल बताया नहीं जा सकता ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) बिंदु A $(-3, 5)$ और बिंदु B $(4, -1)$ से जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$\therefore$ रेखा AB का ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = \dfrac{-6}{7}$

उदा. (2) सिद्‌ध कीजिए कि बिंदु $P(-2, 3)$, बिंदु $Q(1, 2)$ बिंदु $R(4, 1)$ यह एक रेखीय बिंदु हैं ।

हल : $P(-2, 3)$, $Q(1, 2)$ और $R(4, 1)$ ये दिए हुए बिंदु हैं ।

रेखा PQ का ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{1-(-2)} = -\dfrac{1}{3}$

रेखा QR का ढाल $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

रेखा PQ और रेखा QR का ढाल समान है ।

परंतु बिंदु Q यह दोनों ही रेखाओं पर है ।

$\therefore$ बिंदु P, Q, R यह एकरेखीय बिंदु हैं ।

उदा. (3) यदि बिंदु $P(k, 0)$ और बिंदु $Q(-3, -2)$, इन दोनों बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा का ढाल $\dfrac{2}{7}$ है तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $P(k, 0)$ और $Q(-3, -2)$

रेखा PQ का ढाल $= \dfrac{-2-0}{-3-k} = \dfrac{-2}{-3-k}$

रेखा PQ का ढाल $\dfrac{2}{7}$ दिया है ।

$\therefore \dfrac{-2}{-3-k} = \dfrac{2}{7}$ $\qquad \therefore k = 4$

उदा. (4) बिंदु A (6, 1), बिंदु B (8, 2), बिंदु C (9, 4) और बिंदु D (7, 3) यह $\square$ ABCD के शीर्ष बिंदु हों तो सिद्ध कीजिए कि $\square$ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

हल : आपको पता है कि, रेखा का ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

रेखा AB का ढाल = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

रेखा BC का ढाल = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

रेखा CD का ढाल = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

रेखा DA का ढाल = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

रेखा AB का ढाल = रेखा CD का ढाल .... (I) तथा (III) से

$\therefore$ रेखा AB || रेखा CD

रेखा BC का ढाल = रेखा DA का ढाल .... (II) तथा (IV) से

$\therefore$ रेखा BC || रेखा DA

अर्थात चतुर्भुज के दोनों सम्मुख भुजाओं के युग्म परस्पर समांतर है ।

$\therefore$ $\square$ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. किसी रेखा द्‌वारा X-अक्ष की धन दिशा की ओर निर्मित कोण का माप दिया गया है, इस आधार पर उन रेखाओं का ढाल ज्ञात कीजिए ।
   (1) 45° (2) 60° (3) 90°
2. नीचे दिए गए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए ।
   (1) A (2, 3) और B (4, 7) (2) P (−3, 1) और Q (5, −2)
   (3) C (5, −2) और D (7, 3) (4) L (−2, −3) और M (−6, −8)
   (5) E(−4, −2) और F (6, 3) (6) T (0, −3) और S (0, 4)
3. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नहीं ? जाँच कीजिए ।
   (1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)
   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)
   (5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K$(-2, \frac{5}{2})$, N(4, −2)
4. बिंदु A (1, −1), बिंदु B (0, 4), बिंदु C (−5, 3) ये त्रिभुज के शीर्षबिंदु हैं तो त्रिभुज की प्रत्येक भुजा का ढाल ज्ञात कीजिए ।
5. सिद्ध कीजिए कि, बिंदु A (−4, −7), बिंदु B (−1, 2), बिंदु C (8, 5) और D (5, −4) यह समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष बिंदु हैं ।

6. R(1, −1) और S (−2, k) है । यदि इस रेखा RS का ढाल −2 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।
7. B(k, −5) और C (1, 2) है । यदि इस रेखा का ढाल 7 हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।
8. बिंदु P(2, 4), Q (3, 6), R(3, 1) और S(5, k) है और रेखा PQ और रेखा RS परस्पर समांतर हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. उचित पर्याय चुनकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(1) रेखा AB, यह Y-अक्ष के समांतर है यदि बिंदु A के निर्देशांक (1,3) हो तो, B बिंदु के निर्देशांक .... होंगे ।

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,−3)

(2) निम्नलिखित में से बिंदु .... X- अक्ष पर धन दिशा की ओर है ।

(A)(−2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (−3,4) इस बिंदु की आरंभ बिंदु से दूरी ...... है ।

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)−5

(4) एक रेखा द्वारा X- अक्ष की धन दिशा से 30° का कोण बनता है, इसलिए उस रेखा का ढाल .... है ।

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. निम्नलिखित बिंदु एक रेखीय हैं या नही ? निश्चित कीजिए ।

(1) A (0,2) , B (1,−0.5), C (2,−3)

(2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) और Q (12,20) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

4. A (3,8) और B (−9,3) इन बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को Y- अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है ।

5. X-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु प्राप्त कीजिए जो P(2,−5) और Q(−2,9) से समान दूरी पर हो ।

6. निम्नलिखित बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

(1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (−6, −3), Q (−1, 9) (3) R (−3a, a), S (a, −2a)

7. किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदु A (−3,1), B (0,−2) और C (1,3) हों तो इस त्रिभुज के परिकेंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

8. निम्नलिखित बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड त्रिभुज बना सकते हैं क्या ? यदि त्रिभुज बनता हो तो भुजाओं के आधार पर त्रिभुज का प्रकार लिखिए।

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. यदि बिंदुओं P (−12,−3) और Q (4, k) से जानेवाली रेखा का ढाल $\frac{1}{2}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

10. सिद्‌ध कीजिए कि, बिंदुओं A(4, 8) और B(5, 5) को जोड़ने वाली रेखा बिंदुओं C(2,4) और D(1,7) को जोड़ने वाली रेखा के समांतर है।

11. सिद्‌ध कीजिए कि, बिंदु P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1)और S(−1,−5) समांतर चतुर्भुज के शीर्ष बिंदु हैं।

12. यदि बिंदु P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) और S(−2,−5) हो तो सिद्‌ध कीजिए कि □PQRS एक आयत है।

13. A (−1, 1), B (5, −3) और C (3, 5) इन शीर्ष बिंदु वाले त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

14★. यदि D (−7, 6), E (8, 5)और F (2, −2) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदु हों तो उस त्रिभुज के केंद्रव बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

15. सिद्‌ध कीजिए, कि A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) और D(5, −3) वर्ग के शीर्ष बिंदु हैं।

16. शीर्ष बिंदु A(7, 1), B(3, 5) और C(2, 0) वाले त्रिभुज के परिवृत्त के केंद्र (परिकेंद्र) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

17. यदि बिंदु A(4,−3) और B(8,5) हो तो रेखाखंड AB को 3:1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

18★. बिंदुओं A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) और D(2, 3) को क्रम से जोड़ने पर बनने वाले □ ABCD का प्रकार लिखिए।

19★. बिंदु P, Q, R और S के कारण रेखाखंड AB पाँच सर्वांगसम भागों में विभाजित होता है। यदि A-P-Q – R-S-B और Q(12, 14) तथा S(4, 18) हो तो A, P, R, B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

20. P (6,−6), Q (3,−7) और R (3,3) इन बिंदुओं से जाने वाले वृत्त के केंद्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

21★. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक A (5,6), B (1,−2) और C (3,−2) हों तो चौथे बिंदु के सभी निर्देशांकों की जितनी संभव हो उतनी जोड़ियाँ ज्ञात कीजिए।

22. A (1,7), B (6,3) C (0,−3) और D (−3,3) शीर्ष बिंदुओं वाला एक चतुर्भुज है। इस चतुर्भुज के प्रत्येक विकर्ण का ढाल ज्ञात कीजिए।

PG6URG

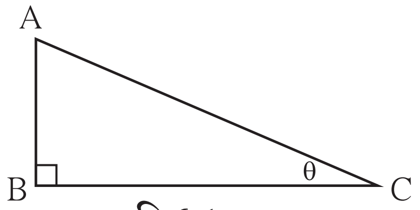
6 त्रिकोणमिति

आओ सीखें

- त्रिकोणमितीय अनुपात
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
- उन्नत कोण तथा अवनत कोण
- ऊँचाई तथा दूरी पर आधारित उदाहरण

थोड़ा याद करें

1. संलग्न आकृति के आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।



आकृति 6.1

$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$, $\cos\theta = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$,

$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$

2. नीचे दिए गए अनुपातों के बीच का संबंध लिखिए ।

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boxed{\ }$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \boxed{\ })$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \boxed{\ })$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \boxed{\ }$

3. नीचे दिया गया समीकरण पूर्ण कीजिए ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \boxed{\ }$

4. नीचे दिए गए त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान लिखिए ।

(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{\boxed{\ }}$ (ii) $\cos 30^\circ = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$ (iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$

(iv) $\sin 60^\circ = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$ (v) $\cos 45^\circ = \dfrac{\boxed{\ }}{\boxed{\ }}$ (vi) $\tan 45^\circ = \boxed{\ }$

हमने नौवीं कक्षा में न्यूनकोण के कुछ त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन किया है । इस वर्ष न्यून कोण के ही कुछ और त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन करेंगे ।

आओ जानें

कोसेक, सेक और कॉट अनुपात (cosec, sec and cot ratios)

कोण के साईन अनुपात के व्युत्क्रम अनुपात को कोसिकेंट (cosecant) अनुपात कहते हैं ।

संक्षेप में इसे cosec लिखा जाता है । $\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

इसी प्रकार कोसाइन और टँजेंट अनुपातों के व्युत्क्रम अनुपात को क्रमश: सिकेंट (secant) और कोटँजेंट (cotangent) अनुपात कहते हैं और इसे संक्षेप में क्रमश: sec और cot लिखते हैं ।

$\therefore\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ और $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

आकृति 6.2 में,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

अर्थात, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

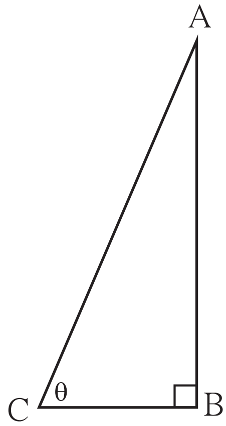
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

अर्थात, $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ यह आप जानते हैं ।

$$\therefore\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



आकृति 6.2

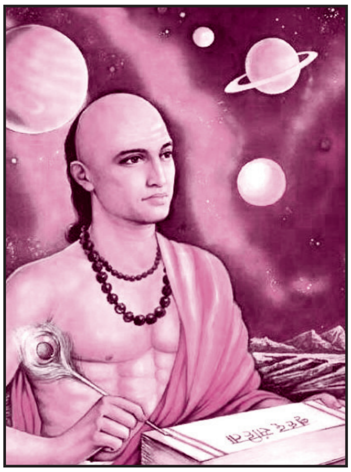
इसे ध्यान में रखें

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंध

cosec, sec और cot इन अनुपातों की परिभाषा से,

- $\dfrac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\ \theta \qquad \therefore\ \sin\theta \times \text{cosec}\ \theta = 1$
- $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \therefore\ \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \qquad \therefore\ \tan\theta \times \cot\theta = 1$

अधिक जानकारी हेतू



महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट का जन्म इ.स. 476 में कुसुमपुर नामक गाँव में हुआ था । यह गाँव बिहार में पटना शहर के पास है । उन्होंने अंकगणित, बीजगणित और भूमिति जैसी गणित की शाखाओं के लिए बहुत कार्य किया । उन्होंने 'आर्यभटीय' नामक ग्रंथ में अनेक गणितीय निष्कर्ष सूत्र के रूप में लिखकर रखे हैं । उदाहरणार्थ,

(1) अंकगणितीय श्रृंखला का n वाँ पद ज्ञात करने का और प्रथम n पदों के योगफल का सूत्र

(2) $\sqrt{2}$ का मान ज्ञात करने का सूत्र

(3) π का मान 3.1416 चार दशमलव स्थान तक का सही मान

खगोलशास्त्र के अध्ययन में उन्होंने त्रिकोणमिति का उपयोग किया और **ज्या अनुपात (sine ratio)** की संकल्पना का उपयोग पहली बार किया ।

उस समय के विश्व के गणितीय ज्ञान को ध्यान में रखें तो उनके कार्य श्रेष्ठ थे । इसलिए उनके ग्रंथ का प्रसार पूरे भारत में उसी प्रकार अरब देशों से होते हुए यूरोप तक हुआ ।

सभी निरीक्षकों का विचार था कि पृथ्वी स्थिर है और सूर्य, चंद्र तथा तारे पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। परंतु आर्यभट ने लिखा कि जिस प्रकार नाव से यात्रा करते समय तट के वृक्ष तथा वस्तुएँ विपरीत दिशा में जाती हुई प्रतीत होती हैं, उसी प्रकार पृथ्वी के लोगों को भी सूर्य, चंद्र, तारों इत्यादि की गति का आभास होता है । अर्थात पृथ्वी भ्रमण करती है। तब यह मान्य हुआ कि पृथ्वी अपने चारों ओर घूमती है । इसी कारण आकाश में ग्रह, तारों के घूमने का आभास होता है ।

19 अप्रैल 1975 को भारत ने अंतरिक्ष में अपना पहला उपग्रह अंतरिक्ष में प्रक्षेपित किया । इस उपग्रह को 'आर्यभट' नाम देकर देश ने इस महान गणितज्ञ को गौरवान्वित किया ।

★ $0°, 30°, 45°, 60°$ और $90°$ माप के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारिणी।

त्रिकोणमितीय अनुपात	कोणों के माप (θ)				
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	निश्चित नहीं कर सकते
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	निश्चित नहीं कर सकते
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	निश्चित नहीं कर सकते	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

आओ जानें

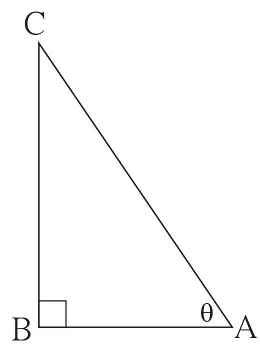
त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical identities)

संलग्न आकृति 6.3 में समकोण Δ ABC में, $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



आकृति 6.3

इसी प्रकार, पायथागोरस के प्रमेयानुसार ,

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

समीकरण (I) के दोनों पक्षों में AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \quad \frac{BC^2}{AC^2}+\frac{AB^2}{AC^2}=1$

$\therefore \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2+\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ को $\sin^2\theta$ और $(\cos\theta)^2$ को $\cos^2\theta$ इस प्रकार लिखते हैं।]

$\mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ .... (II)

अब समीकरण (II) के दोनों पक्षों में $\sin^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\mathbf{1 + \cot^2\theta = cosec^2\theta}$ .... (III)

उसी प्रकार, समीकरण (II) के दोनों पक्षों में $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$ .... (IV)

समीकरण (II), (III), तथा (IV) यह मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ हैं ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि $\sin\theta = \frac{20}{29}$ हो तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : **विधि I**

हम जानते हैं कि

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$

$= \frac{441}{841}$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{21}{29}$

विधि II

$\sin\theta = \frac{20}{29}$

आकृति के अनुसार $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore$ AB = $20k$ तथा AC = $29k$

माना BC = x

पायथागोरस के प्रमेय से

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

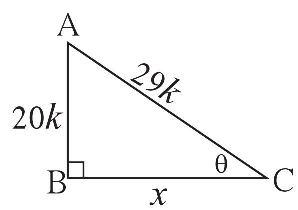
$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore \quad x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$



आकृति 6.4

उदा. (2) यदि $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : **विधि I**

हम जानते हैं कि,

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

विधि II

आकृति के अनुसार,

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

$$\therefore \quad PQ = 7k,\ PR = 25k$$

पायथागोरस के प्रमेय से,

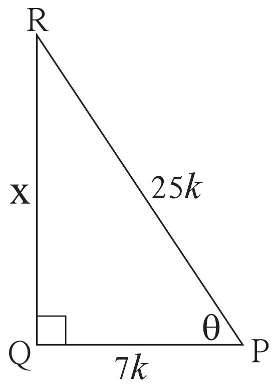
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

अब, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



आकृति 6.5

उदा. (3) यदि $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ हो तो $\sec\theta$ और $\text{cosec}\,\theta$ के मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

हम जानते हैं कि,

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

अब, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{13}{12}$$

उदा. (4) यदि $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : **विधि I**

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

विधि II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

हम जानते हैं कि $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

उदा. (5) सिद्ध कीजिए कि, $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

हल : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

उदा. (6) नीचे दिए गए समीकरणों में θ का निरसन कीजिए ।

$x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta$

$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta$

हल :

$$x = a \cot \theta - b \operatorname{cosec} \theta \quad \text{..........} \quad (I)$$

$$y = a \cot \theta + b \operatorname{cosec} \theta \quad \text{..........} \quad (II)$$

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़नेपर

$$x + y = 2a \cot \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{x+y}{2a} \quad \text{..........} \quad (III)$$

समीकरण (II) में से (I) को घटानेपर,

$$y - x = 2b \operatorname{cosec} \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{y-x}{2b} \quad \text{..........} \quad (IV)$$

अब, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

अथवा $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. यदि $\sin\theta = \frac{7}{25}$ तो $\cos\theta$ तथा $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2. यदि $\tan\theta = \frac{3}{4}$ तो $\sec\theta$ तथा $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $\cot\theta = \frac{40}{9}$ तो $\operatorname{cosec}\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ हो तो $\sec\theta$, $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

5. यदि $\tan\theta = 1$ तो $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

6. सिद्ध कीजिए ।

   (1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$ = secθ – tanθ

(4) (secθ – cosθ)(cotθ + tanθ) = tanθ secθ

(5) cotθ + tanθ = cosecθ secθ

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$ = secθ + tanθ

(7) $\sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) secθ + tanθ = $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) यदि $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ तो सिद्‌ध कीजिए कि $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{\left(1+\tan^2 A\right)^2} + \dfrac{\cot A}{\left(1+\cot^2 A\right)^2}$ = sin A cos A

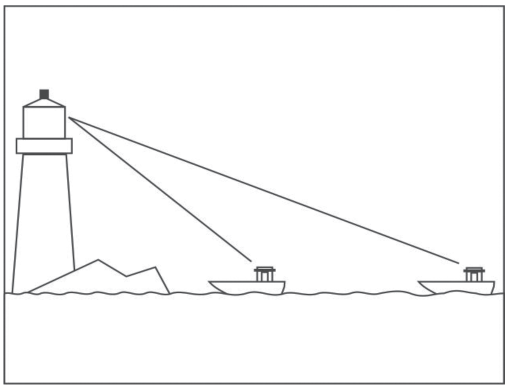
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1} = \dfrac{\tan\theta+\sec\theta+1}{\tan\theta+\sec\theta-1}$

आओ जानें

त्रिकोणमिति का उपयोजन (Application of trigonometry)

कई बार हमें मीनार की, इमारत की या पेड़ की उँचाई उसी प्रकार जहाज की दीपस्तंभ से दूरी अथवा नदी के पाट की चौड़ाई इत्यादि ज्ञात करनी होती है । इन दूरियों का हम प्रत्यक्ष रूप से मापन नहीं कर सकते । किंतु त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से ऊँचाई तथा दूरी निश्चित कर सकते हैं ।



आकृति 6.6

ऊँचाई तथा दूरी निश्चित करने के लिए सर्वप्रथम दी गई जानकारी को दर्शाने वाली कच्ची आकृति (चित्र) तैयार करेंगे । वृक्ष (पेड़), पर्वत, मीनार आदि वस्तुएँ जमीन पर लंबवत हैं, इसे दर्शाने के लिए हम आकृति में लंब रेखाखंड का उपयोग करेंगे । हम निरीक्षक की ऊँचाई का विचार नहीं करेंगे । सामान्यत: हम मानते हैं कि निरीक्षक की दृष्टि क्षैतिज समांतर है ।

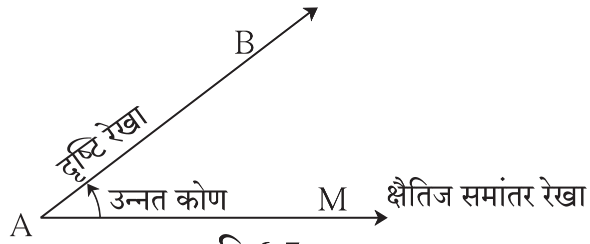
सर्व प्रथम हम कुछ संबंधित संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे ।

(i) दृष्टि रेखा (Line of vision) :

बिंदु 'A' पर खड़ा निरीक्षक बिंदु 'B' की ओर देखता है तब रेखा AB को दृष्टि रेखा कहते हैं ।

(ii) उन्नत कोण (Angle of elevation) :

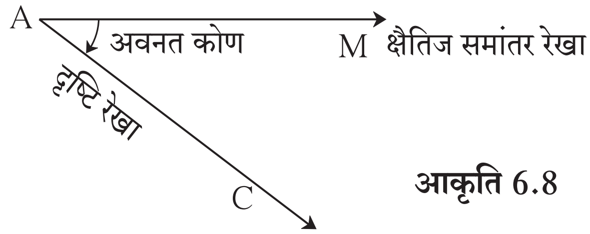
रेखा AM निरीक्षक की सामान्य दृष्टि रेखा है, जो क्षितिज के समांतर है। निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु B, A से अधिक ऊँचाई पर है, तब रेखा AB यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से जो कोण बनाती है उसे उन्नत कोण कहते हैं । आकृति में $\angle$ MAB उन्नत कोण है ।



आकृति 6.7

(iii) अवनत कोण (Angle of depression) :

यदि निरीक्षण किया जाने वाला बिंदु C क्षैतिज समांतर रेखा AM के नीचे हो तब रेखा AC यह दृष्टि रेखा, रेखा AM से अवनत कोण बनाती है । आकृति में $\angle$ MAC यह अवनत कोण है ।



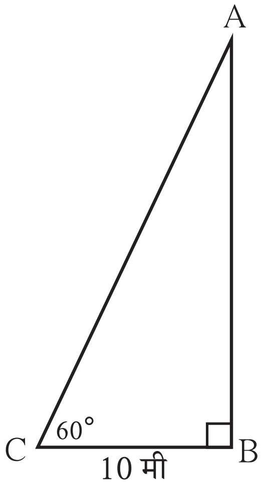
आकृति 6.8

जब हम क्षैतिज समांतर रेखा की ऊपरी दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण उन्नत कोण होता है ।
जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के नीचे की दिशा में देखते हैं तब बनने वाला कोण अवनत कोण होता है ।

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी पेड़ के तने से 10 मी की दूरी पर खड़ा निरीक्षक पेड़ की चोटी की ओर देखता है तब 60° माप का उन्नत कोण बनता है । उस पेड़ की ऊँचाई कितनी होगी ? ($\sqrt{3} = 1.73$)

हल : आकृति 6.9 में बिंदु C के पास निरीक्षक है और AB पेड़ है ।



आकृति 6.9

AB = h = पेड़ की ऊँचाई

निरीक्षक की पेड़ से दूरी BC = 10 मी

और उन्नत कोण $(\theta) = \angle BCA = 60^\circ$

आकृति से, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) तथा (II) से

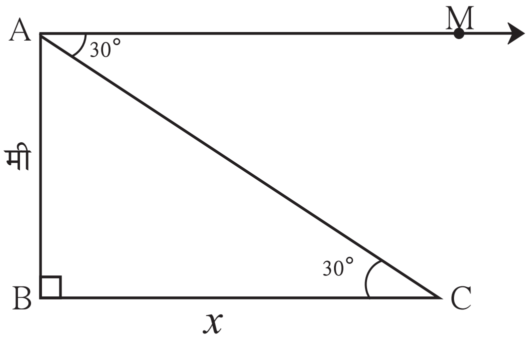
$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ मी

$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई 17.3 मी है ।

उदा. (2) 40 मी ऊँची इमारत की छत से उस इमारत से कुछ मीटर की दूरी पर खड़े स्कूटर की ओर देखने पर 30° माप का अवनत कोण बनता है तो वह स्कूटर इमारत से कितनी दूरी पर है ?
($\sqrt{3}$ = 1.73)

हल : आकृति 6.10 में रेख AB इमारत है । इमारत से 'x' मी की दूरी 'C' पर स्कूटर खड़ा है।
आकृति में A पर निरीक्षक खड़ा है ।
AM यह क्षैतिज समांतर रेखा है ।
$\angle$ MAC यह अवनत कोण है ।
ध्यान दें कि $\angle$ MAC तथा $\angle$ ACB एकांतर कोण सर्वांगसम है ।



आकृति 6.10

आकृति से, $\tan 30° = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$

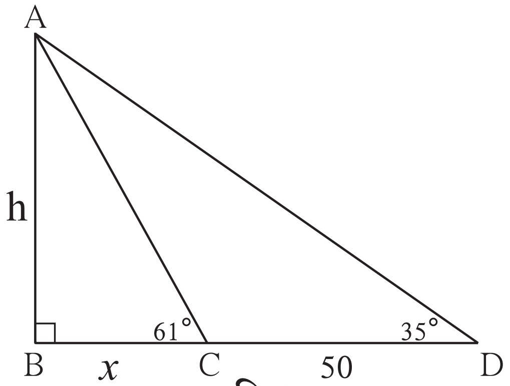
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.\ 20$ मी

$\therefore$ वह स्कूटर इमारत से 69.20 मी दूरी पर खड़ा है ।

उदा. (3) नदी के पाट की चौड़ाई ज्ञात करने के लिए एक व्यक्ति एक किनारे से दूसरे किनारे पर स्थित मीनार की चोटी को देखता है । उस समय 61° माप का उन्नत कोण बनता है । उसी रेखा में नदी के उसी किनारे से 50 मी की दूरी पर पीछे जाकर मीनार की ऊपरी चोटी को देखने पर 35° माप का उन्नत कोण बनता हो तो नदी की चौड़ाई और मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए । ($\tan 61° \approx 1.8$, $\tan 35° \approx 0.7$)



आकृति 6.11

हल : रेख AB नदी के दूसरे किनारे की मीनार की ऊँचाई को दर्शाता है । 'A' मीनार की चोटी तथा रेख BC नदी की चौड़ाई दर्शाता है ।
माना कि मीनार की ऊँचाई h मी तथा नदी की चौड़ाई x मी है ।

आकृति से $\tan 61° = \frac{h}{x}$

$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 से गुणा करनेपर

समकोण Δ ABD में,

$$\tan 35° = \frac{h}{x + 50}$$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$\therefore \quad h = 0.7\,(x + 50)$

$\therefore \quad 10h = 7\,(x + 50)$ .... (II)

[(I) तथा (II) से]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

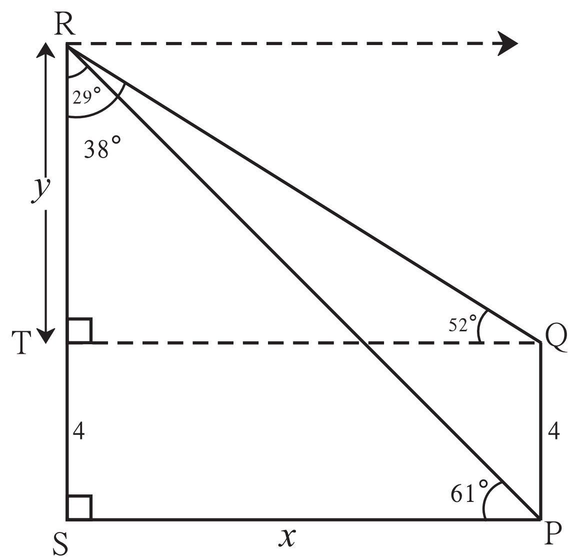
$\therefore \quad x = \frac{350}{11} = 31.82$

अब, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ मी.

$\therefore$ नदी के पाट की चौड़ाई = 31.82 मी मीनार की ऊँचाई = 57.28 मी

उदा. (4) रोशनी घर के दरवाजे पर खड़ी थी। उसने घर से कुछ ही दूरी पर स्थित एक पेड़ की चोटी पर बैठे एक गरुड़ को देखा, तब उसकी दृष्टि से 61° माप का उन्नत कोण बना था। उसे ठीक से देखने के लिए वह घर की 4 मीटर ऊँची छत पर गई। यदि वहाँ से गरुड़ को देखते समय 52° मापवाला उन्नत कोण बना तो गरुड़ जमीन से कितनी ऊँचाई पर था ?
(उत्तर पासवाले पूर्णांक तक ज्ञात कीजिए।)



आकृति 6.12

(tan 61° = 1.80, tan 52° = 1.28, tan 29° = 0.55, tan 38° = 0.78)

हल : माना आकृति 6.12 में PQ घर और SR पेड़ है। गरुड़ R स्थान पर है।

रेख QT $\perp$ रेख RS खींचा

$\therefore \square$ TSPQ आयत है।

माना SP = x, TR = y

अब, Δ RSP में, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

उसी प्रकार, Δ RTQ में, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

उसी प्रकार, $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \dfrac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) तथा (II) से

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (पासवाले पूर्णांक तक)

$\therefore$ RS = $y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ गरुड़ जमीन से 14 मीटर की ऊँचाई पर था।

उदा. (5) आँधी के कारण किसी पेड़ का सिरा टूटकर जमीन की ओर झुक गया तब झुके हुए सिरे द्‌वारा जमीन से 30° माप का कोण बनता है। पेड़ के सिरे तथा तने के बीच की दूरी 10 मी हो तो पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना, आकृति 6.13 में पेड़ AB का शीर्ष बिंदु 'A' है। आँधी के कारण 'C' पर मुड़ने से पेड़ बिंदु D स्थान पर (जमीन पर) टिका हुआ है।

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 मी, माना BC = x मी

और CA= CD = y मी

समकोण Δ CDB में,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

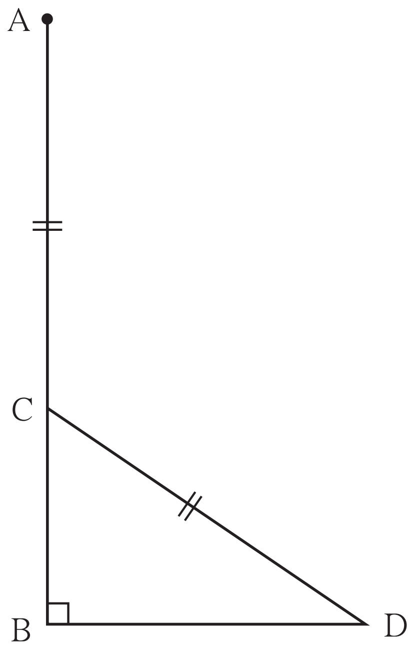
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

पेड़ की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मी है ।



आकृति 6.13

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. कोई व्यक्ति किसी गिरिजाघर से 80 मीटर दूरी पर खड़ा है । उस व्यक्ति द्‌वारा गिरिजाघर की छत की ओर देखने पर 45° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, गिरिजाघर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

2. दीपस्तंभ से किसी जहाज की ओर देखते समय 60° माप का अवनत कोण बनता है । यदि दीपस्तंभ की ऊँचाई 90 मीटर हो तो वह जहाज दीपस्तंभ से कितनी दूरी पर होगा? ($\sqrt{3} = 1.73$)

3. 12 मीटर चौड़ाई वाले रास्ते के दोनों ओर आमने-सामने दो इमारतें हैं । उनमें से एक की ऊँचाई 10 मीटर है । उसके छत से दूसरे इमारत की छत की ओर देखते समय 60° माप का उन्नत कोण बनता हो तो, दूसरी इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?

4. 18 मीटर तथा 7 मीटर ऊँचाई वाले दो खंभे जमीन पर खड़े हैं । उनके ऊपरी सिरों को जोड़ने वाले तार की लंबाई 22 मीटर हो तो उस तार द्‌वारा क्षैतिज समांतर सतह से बने कोण का माप ज्ञात कीजिए ।

5. आँधी के कारण किसी पेड़ का सिरा टूटकर जमीन से 60° माप का कोण बनाता है । पेड़ का जमीन पर टिका हुआ सिरा तथा पेड़ के तने के बीच की दूरी 20 मीटर हो तो, पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

6. एक पतंग उड़ते समय जमीन से 60 मीटर की लंब ऊँचाई तक पहुँचती है । पतंग के धागे का एक सिरा जमीन पर बाँधने पर जमीन तथा धागे के बीच 60° माप का कोण बनता है । धागा एकदम सीधा होगा यह मानकर धागे की लंबाई ज्ञात कीजिए । ($\sqrt{3} = 1.73$)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(1) $\sin\theta\ \operatorname{cosec}\theta$ = कितना ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) निम्नलिखित में से $\operatorname{cosec}45^\circ$ का मान कौन - सा है ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = कितना ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) जब हम क्षैतिज समांतर रेखा के ऊपर की दिशा में देखते हैं । तब .... कोण बनता है ।

(A) उन्नत कोण (B) अवनत कोण (C) शून्य (D) रेखीय

2. यदि $\sin\theta = \frac{11}{61}$, तो सर्वसमिका का उपयोग कर $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $\tan\theta = 2$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

5. सिद्ध कीजिए ।

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \operatorname{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} + \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

6. एक लड़का किसी इमारत से 48 मीटर की दूरी पर खड़ा है । उस इमारत के ऊपरी सिरे की ओर देखते समय लड़के द्‌वारा 30° माप का उन्नत कोण बनता है तो उस इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?

7. दीपस्तंभ से किसी जहाज को देखते समय 30° माप का अवनत कोण बनता है । दीपस्तंभ की ऊँचाई 100 मी हो तो, दीपस्तंभ से जहाज की दूरी ज्ञात कीजिए ।

8. 15 मी चौड़ाईवाले रास्ते की दोनों ओर आमने – सामने दो इमारते हैं । 12 मी ऊँचाईवाली पहली इमारत की छत से दूसरी इमारत की छत को देखने पर 30° माप का उन्नत कोण बनता है तो, दूसरी इमारत की ऊँचाई कितनी होगी ?

9. अग्निशामक दल के वाहन पर रखी गई सीढ़ी अधिक से अधिक 70° माप के कोण तक उठाई जा सकती है । उस समय सीढ़ी की अधिक से अधिक लंबाई 20 मी होती है । वाहन पर सीढ़ी का सिरा जमीन से 2 मी ऊँचाई पर हो तो, सीढ़ी का दूसरा सिरा जमीन से अधिक से अधिक कितनी ऊँचाई पर पहुँचाया जा सकता है? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10★. आकाश में उड़ते हुए हवाई जहाज चालक ने हवाई अड्‌डे पर हवाई जहाज को उतारते समय 20° का अवनत कोण बनाया । उस समय हवाई जहाज का औसत वेग 200 किमी प्रति घंटा था । 54 सेकंड में हवाई जहाज हवाई अड्‌डे पर उतरा । आकाश से जमीन पर उतरते समय हवाई जहाज जमीन से अधिक से अधिक कितनी उँचाई पर था? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

PSK481

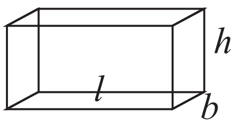
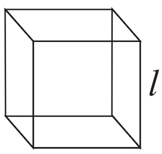
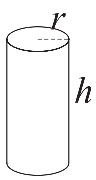
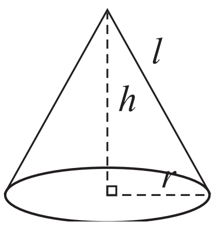
7 महत्वमापन

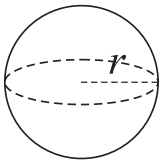
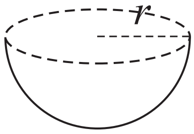
आओ सीखें

- विभिन्न घनाकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल पर आधारित मिश्रित उदाहरण
- वृत्त चाप – वृत्त चाप की लंबाई
- वृत्त के द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल
- वृत्तखंड का क्षेत्रफल

थोड़ा याद करें

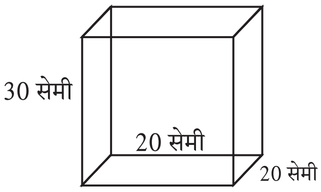
पिछली कक्षा में हमने कुछ त्रिमितीय आकृतियों के पृष्ठफल तथा घनफल का अध्ययन किया है । इसके लिए उपयोग में आनेवाले सूत्रों को याद करें ।

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
1 .	घनाभ 	ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $2h\,(\,l + b\,)$ संपूर्ण पृष्ठफल = $2\;(lb + bh + hl\,)$ घनाभ का घनफल = lbh
2 .	समघन 	समघन के ऊर्ध्वाधर पृष्ठों का पृष्ठफल = $4l^2$ समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$ समघन का घनफल = l^3
3 .	लंबवृत्ताकार बेलन 	लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi \mathrm{rh}$ लंबवृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi \mathrm{r}\,(\,\mathrm{r} + \mathrm{h}\,)$ लंबवृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi \mathrm{r}^2\mathrm{h}$
4 .	शंकु 	शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ शंकु का वक्रपृष्ठफल = $\pi \mathrm{r} l$ शंकु का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi \mathrm{r}\,(\mathrm{r} + l)$ शंकु का घनफल = $\frac{1}{3} \times \pi \mathrm{r}^2\mathrm{h}$

क्र.	त्रिमितीय आकृति	सूत्र
5.	गोला 	गोले का पृष्ठफल = $4\pi r^2$ गोले का घनफल = $\frac{4}{3}\pi r^3$
6.	अर्धगोला 	अर्धगोले का वक्रपृष्ठफल = $2\pi r^2$ अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठफल = $3\pi r^2$ अर्धगोले का घनफल = $\frac{2}{3}\pi r^3$

निम्नलिखित उदाहरणों को हल कीजिए ।

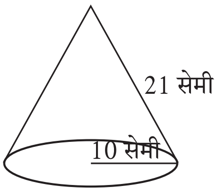
उदा.(1)



आकृति 7.1

संलग्न आकृति में 30 सेमी ऊँचाई, 20 सेमी लंबाई तथा 20 सेमी चौड़ाई वाला तेल का डिब्बा है । उसमें कितने लीटर तेल भरा जा सकेगा ? (1 लीटर = 1000 सेमी^{3})

उदा.(2)



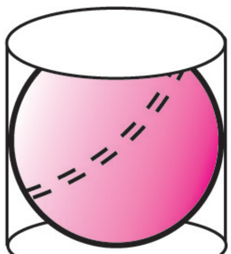
आकृति 7.2

संलग्न आकृति में जोकर की टोपी और टोपी का माप दर्शाया गई है । दिए गए माप के अनुसार इस टोपी को बनाने में कितना कपड़ा लगेगा ?

थोड़ा सोचें

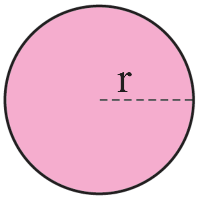
संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार किसी लंब वृत्ताकार बेलन के अंतःभाग में एक गोला है । गोला वृत्ताकार बेलन के आधार, ऊपरी पृष्ठभाग और वक्र पृष्ठभाग को स्पर्श करती है । वृत्त के आधार की त्रिज्या r हो तो,

1. गोले की त्रिज्या और वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या का अनुपात कितना होगा ?
2. वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल और गोले के वक्रपृष्ठफल का अनुपात कितना होगा ?
3. वृत्ताकार बेलन का घनफल और गोले के घनफल का अनुपात कितना होगा ?

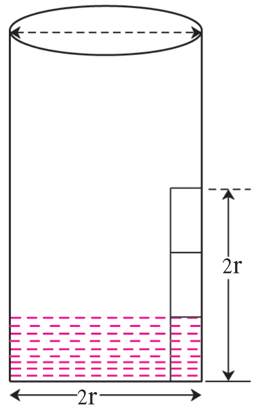


आकृति 7.3

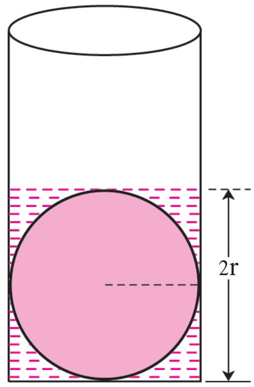
कृति :



आकृति 7.4



आकृति 7.5



आकृति 7.6

उपर्युक्त आकृतियों में दर्शाएनुसार एक गेंद और गेंद की त्रिज्या (r) के बराबर त्रिज्या वाला एक बीकर लें । बीकर के व्यास की लंबाई के बराबर ($2r$) लंबाई वाली एक कागज की पट्टी लें । पट्टी पर उसकी लंबाई के तीन समान भाग करने वाली दो रेखाएँ बनाइए । वह पट्टी बीकर के तल (आधार) से खड़ी चिपकाएँ । बीकर में कागज की पट्टी से नीचे से पहले भाग तक पानी भरें उसके पश्चात गेंद, बीकर के तल (आधार) तक सावधानीपूर्वक रखें । बीकर में पानी की सतह कितनी बढ़ी है इसे देखें ।

पानी की सतह , कागज की पट्टी की ऊँचाई तक बढ़ी हुई दिखेगी ।

हम इस निरीक्षण से गेंद का घनफल प्राप्त करने का सूत्र कैसे प्राप्त होगा इसे समझेंगे ।

बीकर का आकार वृत्ताकार लंब बेलन का है इसलिए बीकर के 2r के बराबर ऊँचाई तक के भाग का घनफल वृत्ताकार लंब बेलन के घनफल के सूत्र से प्राप्त होगा । माना घनफल V है ।

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

किंतु V = गेंद का घनफल + पहले भरे गए पानी का घनफल

= गेंद का घनफल + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ गेंद का घनफल = $V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ गोले के घनफल का सूत्र $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ प्राप्त होगा ।

(इस सूत्र की सहायता से आकृति 7.3 के संदर्भ में प्रश्न क्रमांक 3 का हल अब आप ज्ञात कर सकेंगे ।)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी वृत्ताकार बेलन के आकारवाले पानी की टंकी की त्रिज्या 2.8 मी और उंचाई 3.5 मी है। तो उस टंकी में कितने लीटर पानी भर जा सकेगा ? एक व्यक्ति को प्रतिदिन औसतन 70 लीटर पानी लगता हो तो पूरी भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन कितने व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : त्रिज्या (r) = 2.8 मीटर, उँचाई (h) = 3.5 मीटर, $\pi = \frac{22}{7}$

पानी की टंकी की धारिता = वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी की टंकी का घनफल

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 मी^{3}

= 86.24 × 1000 लीटर ($\because$ 1मी^{3} = 1000 लीटर)

= 86240.00 लीटर

$\therefore$ टंकी में 86240 लीटर पानी भर जा सकेगा।

70 लीटर पानी प्रतिदिन एक व्यक्ति के लिए पर्याप्त होता है।

$\therefore$ संपूर्ण भरी हुई टंकी का पानी प्रतिदिन $\frac{86240}{70}$ = 1232 व्यक्तियों के लिए पर्याप्त होगा।

उदा. (2) 30 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर उससे 10 सेमी त्रिज्यावाले तथा 6 सेमी ऊँचाई वाले ठोस वृत्ताकार बेलन बनाए गए तो उससे बने वृत्ताकार बेलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले की त्रिज्या r = 30 सेमी

वृत्ताकार बेलन की त्रिज्या R = 10 सेमी

वृत्ताकर बेलन की ऊँचाई H = 6 सेमी

माना n वृत्ताकार बेलन बनेंगे

$\therefore$ गोले का घनफल = n × एक वृत्ताकार बेलन का घनफल

$\therefore$ वृत्ताकार बेलन की संख्या = n = $\dfrac{\text{गोले का घनफल}}{\text{एक वृत्ताकार बेलन का घनफल}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2 \times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} \quad = 60$$

$\therefore$ वृत्ताकार बेलनों की कुल संख्या 60

उदा. (3) किसी सर्कस के तंबू का निचला हिस्सा वृत्ताकार बेलन के आकार का तथा ऊपरी हिस्सा शंकु के आकार का है। तंबू के आधार का व्यास 48 मी तथा वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 15 मी है। तंबू की कुल ऊँचाई 33 मी हो तो तंबू बनाने में लगनेवाले कपड़े का क्षेत्रफल तथा तंबू में स्थित हवा का घनफल ज्ञात कीजिए।

हल : तंबू की कुल ऊँचाई 33 मी है।

माना वृत्ताकार बेलन के भाग की ऊँचाई = H $\therefore$ H = 15 मी

$\therefore$ शंक्वाकार भाग की लंब ऊँचाई h = (33−15) = 18 मी

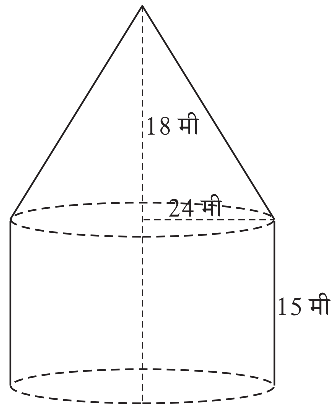
शंकु की तिरछी ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{24^2+18^2}$

$= \sqrt{576+324}$

$= \sqrt{900}$

l = 30 मी



आकृति 7.7

सर्कस के तंबू में लगनेवाला कपड़ा = वृत्ताकार भाग का वक्रपृष्ठफल + शंक्वाकार भाग का वक्रपृष्ठफल

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4525.71 वर्ग मी

तंबू में स्थित हवा का घनफल = वृत्ताकार भाग का घनफल + शंक्वाकार भाग का घनफल

$= \pi r^2H + \frac{1}{3}\,\pi r^2h$

$= \pi r^2 \left(H+\frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

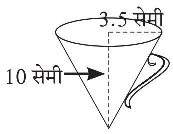
= 38,016 घमी

तंबू के लिए लगनेवाले कपड़े का क्षेत्रफल = 4525.71 वर्ग मी

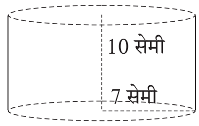
तंबू में स्थित हवा का घनफल = 38016 घमी

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 1.5 सेमी तथा लंब ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु का घनफल ज्ञात कीजिए ।
2. 6 सेमी व्यासवाले गोले का घनफल ज्ञात कीजिए ।
3. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाइ क्रमश: 40 सेमी हो तो उसका संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
4. किसी गोले की त्रिज्या 7 सेमी हो तो उसका पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।
5. किसी धातु के वृत्ताकार बेलन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई 44 सेमी, 21 सेमी और 12 सेमी है । उसे पिघलाकर 24 सेमी ऊँचाई का शंकु बनाया गया तो शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।
6.



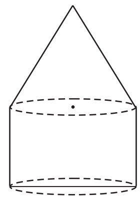
आकृति 7.8
शंक्वाकार पानी का जग



आकृति 7.9
वृत्ताकार बेलन के आकार का पात्र

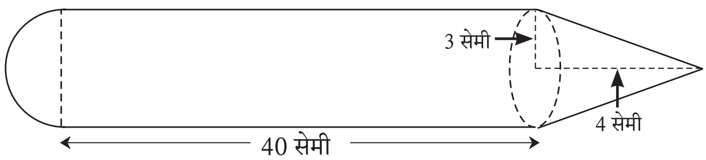
आकृति 7.8 तथा 7.9 में निरीक्षण द्वारा ज्ञात कीजिए कि वृत्ताकार बेलन के आकार वाले बर्तन में कितना पानी भरा जाएगा ?

7. किसी वृत्ताकार बेलन तथा शंकु का आधार समान है । वृत्ताकार बेलन पर शंकु को रखें वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 3 सेमी तथा उसके आधार का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी है यदि संपूर्ण घनाकृति का घनफल 500 घसेमी हो तो संपूर्ण घनाकृति की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।



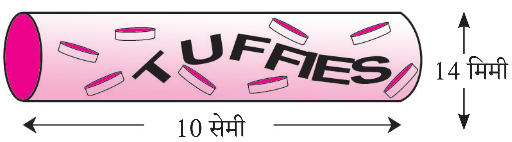
आकृति 7.10

8. संलग्न आकृति 7.11 में दी गई जानकारी के आधार पर अर्धगोले, वृत्ताकार बेलन तथा शंकु से बनाए गए खिलौने का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए ।



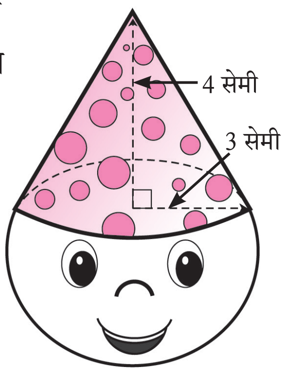
आकृति 7.11

9. आकृति 7.12 में वृत्ताकार बेलन के आकार की चपटी गोली का 10 सेमी लंबाई का एक वेष्टन है । एक गोली की त्रिज्या 7 मिमी और ऊँचाई 5 मिमी हो तो ऐसी कितनी गोलियाँ उस वेष्टन में समाविष्ट होंगी ?



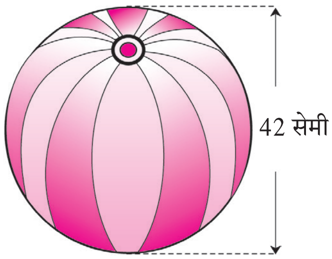
आकृति 7.12

10. आकृति 7.13 में बच्चों का एक खिलौना दर्शाया गया है । खिलौना एक अर्धगोले तथा शंकु की सहायता से बनाया गया है । आकृति में दर्शाए गए माप के आधारपर खिलौने का घनफल तथा पृष्ठफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)



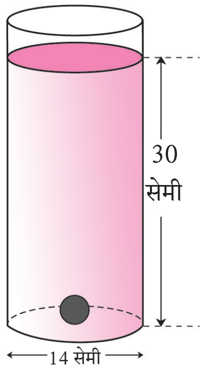
आकृति 7.13

11. आकृति मे दर्शाएनुसार बीच बॉल का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.14

12. आकृति में दर्शाएनुसार लंब वृत्ताकार बेलन वाले ग्लास में पानी है तथा उसमें 2 सेमी व्यास वाले धातु की एक गोली डुबाई गई है । तो पानी का घनफल ज्ञात कीजिए ।

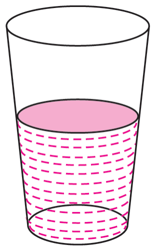


आकृति 7.15

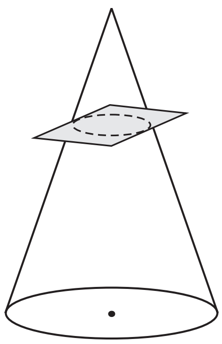
आओ जानें

शंकु छेद (Frustum of the cone)

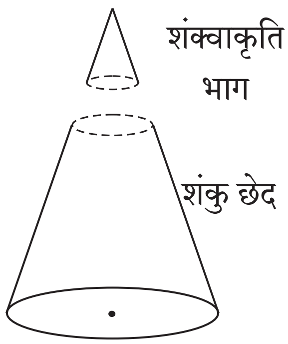
हम पानी पीने के लिए शंक्वाकार प्याले (ग्लास) का उपयोग करते हैं । इस प्याले का आकार उसी प्रकार पानी का आकार यह शंकु छेद के आकार का होता है ।



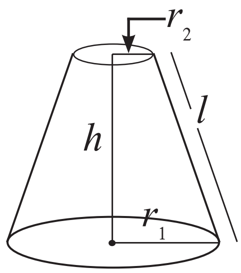
आकृति 7.16



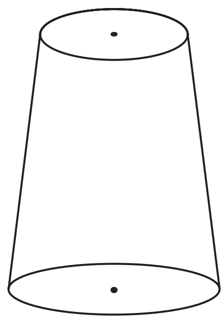
आकृति 7.17
शंकु काटने पर



आकृति 7.18
शंकु को काटने पर
अलग हुए दो भाग



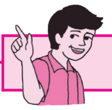
आकृति 7.19
शंकु छेद



आकृति 7.20
उल्टा रखा गया गिलास

आकृति में एक शंकु को उल्टा रखा हुआ दर्शाया गया है । इस शंकु को उसके आधार के समांतर काटा गया । इस प्रकार हुए दो भागों में से एक भाग शंकु ही है । और शेष भाग को शंकु छेद कहते हैं ।

शंकु की तरह ही शंकु छेद का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात किया जा सकता है । इसके लिए हम आगे दिए गए सूत्रों का उपयोग करेंगे ।



इसे ध्यान में रखें

h = शंकु छेद की ऊँचाई, l = शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई,

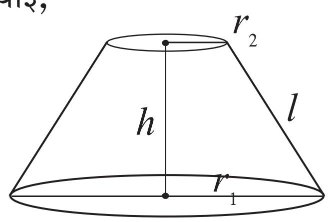
r_1 तथा r_2 = शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या ($r_1 > r_2$)

शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई = l = $\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल = $\pi l\,(r_1 + r_2)$

शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

शंकु छेद का घनफल = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



आकृति 7.21

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) किसी एक शंकु छेद के आकार की बाल्टी की ऊँचाई 28 सेमी है । बाल्टी के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या 12 सेमी तथा 15 सेमी है तो बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा ज्ञात कीजिए ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : बाल्टी के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या r_1 = 15 सेमी, r_2 = 12 सेमी

बाल्टी की ऊँचाई h = 28 सेमी

बाल्टी में भरे जाने वाले पानी की मात्रा = शंकु छेद का घनफल

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

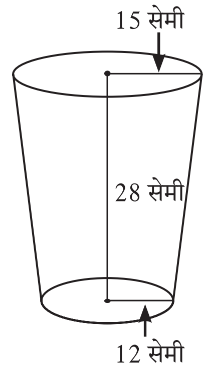
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22\times4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22\times4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

$$= 16104 \text{ सेमी}^3 = 16.104 \text{ लीटर}$$



आकृति 7.22

बाल्टी में पानी की मात्रा 16.104 लीटर है ।

उदा. (2) शंकु छेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमशः 14 सेमी तथा 8 सेमी है । यदि शंकु छेद की ऊँचाई 8 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए । (π= 3.14)

(i) शंकु छेद का वक्रपृष्ठफल (ii) शंकु छेद का संपूर्ण पृष्ठफल (iii) शंकु छेद का घनफल

हल : त्रिज्या r_1 = 14 सेमी , r_2 = 8 सेमी, ऊँचाई h = 8 सेमी

शंकु छेद की तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

$$l = \sqrt{8^2+(14-8)^2}$$

$$l = \sqrt{64+36} = 10 \text{ सेमी}$$

शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल = $\pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ वसेमी

शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल = $\pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ वसेमी

शंकुछेद का घनफल = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. 30 सेमी ऊँचाई वाले शंकुछेद के आकार वाली बाल्टी के वृत्ताकार भागों की त्रिज्या 14 सेमी तथा 7 सेमी है उस बाल्टी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ? ज्ञात कीजिए। (1 लीटर = 1000 घसेमी)

2. शंकुछेद के वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमश: 14 सेमी तथा 6 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 6 सेमी हो तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

   (1) शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल (2) शंकुछेद का संपूर्ण पृष्ठफल (3) शंकुछेद का घनफल

3. किसी शंकुछेद के वृत्ताकार आधार की परिधि क्रमश: 132 सेमी तथा 88 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी है। तो उस शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

परिधि$_1$ = $2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

परिधि$_2$ = $2\pi r_2 = 88$

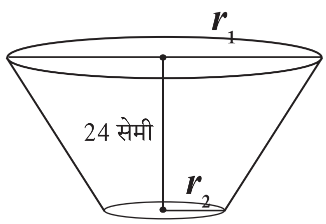
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \boxed{}$ सेमी

शंकुछेद की तिरछी ऊँचाई $= l$

तथा $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$\therefore\ l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$

$l = \boxed{}$ सेमी



आकृति 7.23

शंकुछेद का वक्रपृष्ठफल $= \pi(r_1 + r_2)l$

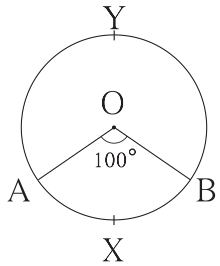
$$= \pi \times \boxed{} \times \boxed{}$$

$$= \boxed{} \text{ वर्ग सेमी}$$

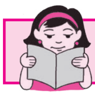
थोड़ा याद करें

संलग्न आकृति के आधार पर निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए ।

चाप का प्रकार	चाप का नाम	चाप का माप
लघु वृत्त चाप	चाप AXB	....
....	चाप AYB	....

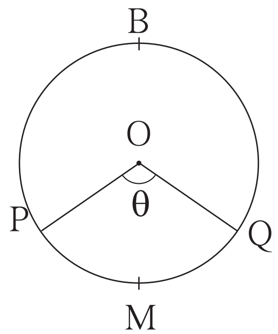


आकृति 7.24



आओ जानें

द्वैत्रिज्य (Sector of a circle)



आकृति 7.25

आकृति में केंद्रीय कोण द्वारा वृत्त क्षेत्र का दो भागों में विभाजन हुआ है । प्रत्येक भाग को द्वैत्रिज्य कहते हैं । वृत्त की दो त्रिज्याओं और उसके दोनों सिरों के जोड़ने वाले वृत्त चाप द्वारा सीमित किए हुए भाग को द्वैत्रिज्य कहते हैं ।

आकृति में O –PMQ और O–PBQ ऐसे दो द्वैत्रिज्य हैं ।

लघु द्वैत्रिज्य (Minor sector) :

दो त्रिज्या तथा उसके संगत लघु चाप द्वारा सीमित किए हुए चाप को लघु द्वैत्रिज्य कहते हैं ।

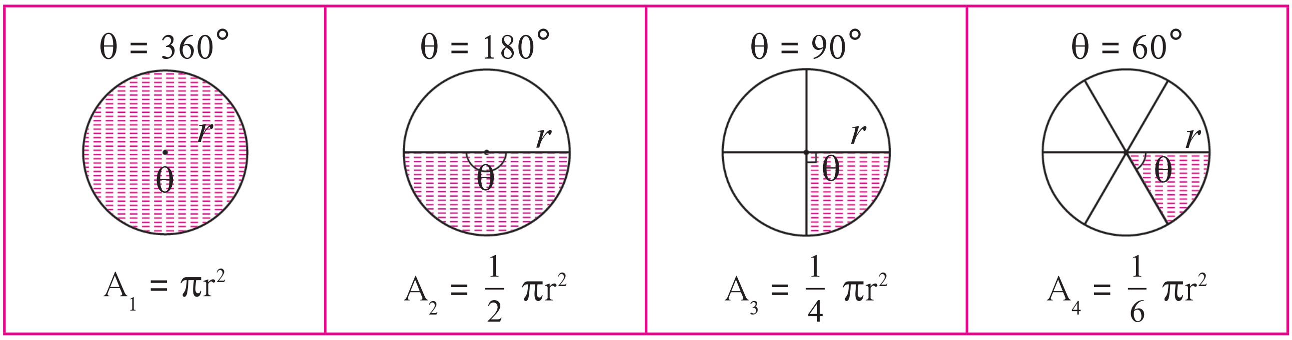
आकृति में O–PMQ लघु द्वैत्रिज्य है ।

दीर्घ द्वैत्रिज्य (Major sector) :

दो त्रिज्या तथा उसके दीर्घ चाप द्वारा सीमित किए हुए चाप को दीर्घ द्वैत्रिज्य कहते हैं । आकृति में O–PBQ यह दीर्घ द्वैत्रिज्य है ।

द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल (Area of a sector)

नीचे दी गई आकृति में दर्शाएनुसार समान त्रिज्यावाले वृत्त के छायांकित भागों के क्षेत्रफल का निरीक्षण करके दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.26

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° = पूर्ण कोण

वृत्त के केंद्रीय कोण का माप = 360° , वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2			
द्‌वैत्रिज्य	द्‌वैत्रिज्य के चाप का माप	$\frac{\theta}{360}$	द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

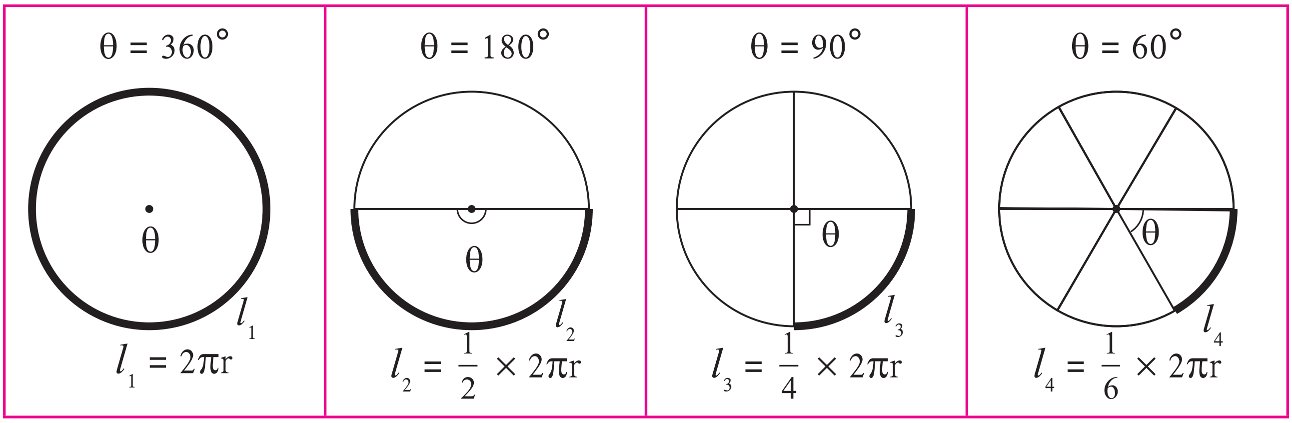
सारिणी से ध्यान में आता है कि वृत्त के क्षेत्रफल को $\frac{\theta}{360}$ से गुणा करने पर चाप का माप θ वाले द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल प्राप्त होता है । इसे सूत्र के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं ।

$$\text{द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल } (A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

इस सूत्र से $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$ अर्थात $\frac{\text{द्‌वैत्रिज्य का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\theta}{360}$

वृत्त चाप की लंबाई (Length of an arc)

नीचे दर्शाएनुसार समान त्रिज्यावाले वृत्तों के गहरे चिन्हांकित किए गए चापों की लंबाई का निरीक्षण करें तथा नीचे दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.27

वृत्त की परिधि = $2\pi r$			
वृत्त चाप की लंबाई	वृत्त चाप का माप (θ)	$\frac{\theta}{360}$	वृत्त चाप की लंबाई (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

उपर्युक्त आकृतिबंध से ध्यान में आता है कि वृत्त की परिधि $\frac{\theta}{360}$ से गुणा करने पर θ माप वाले वृत्त चाप की लंबाई प्राप्त होती है ।

$$\text{वृत्त चाप की लंबाई } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

सूत्र के अनुसार,

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{वृत्त चाप की लंबाई}}{\text{परिधि}} = \frac{\theta}{360}$$

वृत्त चाप की लंबाई और द्‍वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में संबंध

द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

उसी प्रकार वृत्त चाप की लंबाई $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad .... \text{II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \quad .... \text{I तथा II से}$$

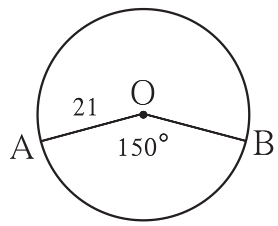
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} = \frac{\text{वृत्त चाप की लंबाई} \times \text{त्रिज्या}}{2}$$

उसी प्रकार $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) 21 सेमी त्रिज्यावाले द्‍वैत्रिज्य के केंद्रीय कोण का माप 150° हो तो द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल तथा संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 7.28

हल : $r = 21$सेमी, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

द्‍वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

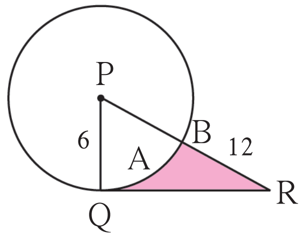
$$= \frac{1155}{2} \text{ सेमी}^2 = 577.5 \text{ सेमी}^2$$

वृत्त चाप की लंबाई $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 55 \text{ सेमी}$$

उदा. (2) आकृति में वृत्त का केंद्र P और त्रिज्या 6 सेमी है। रेख QR वृत्त की स्पर्श रेखा है। PR = 12 सेमी हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3}$ = 1.73)



आकृति 7.29

हल : वृत्त के स्पर्श बिंदु से खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$\therefore$ Δ PQR में, $\angle$ PQR = 90°, PQ = 6 सेमी, PR = 12 सेमी

$$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$$

यदि समकोण त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई उसके कर्ण की लंबाई की आधी हो तो उस भुजा के सम्मुख कोण का माप 30° होता है।

$\therefore$ $\angle$ R = 30° और $\angle$ P = 60°

30°-60°-90° प्रमेय से, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

QR = $6\sqrt{3}$ सेमी

$$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$$

$$= 18\sqrt{3}$$

$$= 18 \times 1.73$$

$$= 31.14 \text{ सेमी}^2$$

द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$\therefore A(P-QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6$$

$$= 3.14 \times 6$$

$$= 18.84 \text{ सेमी}^2$$

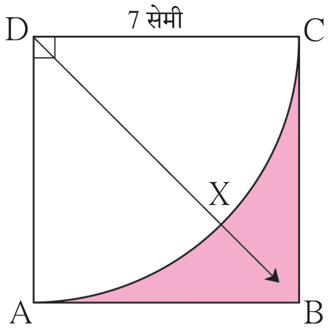
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = A(Δ PQR) - A(P-QAB)

= 31.14 - 18.84

= 12.30 सेमी^{2}

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 12.30 सेमी^{2}

उदा. (3) दी गई आकृति में वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा की लंबाई 7 सेमी है । बिंदु D को केंद्र मानकर तथा DA त्रिज्या लेकर खींचा गया द्वैत्रिज्य D – AXC है, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए रिक्त चौखटों को भरकर उदाहरण पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.30

हल :

वर्ग का क्षेत्रफल = $\boxed{}$ (सूत्र)

$= \boxed{}$

= 49 वर्ग सेमी

द्वैत्रिज्य (D– AXC) का क्षेत्रफल = $\boxed{}$ (सूत्र)

$= \dfrac{\boxed{}}{360} \times \dfrac{22}{7} \times \boxed{}$

= 38.5 वर्ग सेमी

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\boxed{}$ का क्षेत्रफल – $\boxed{}$ का क्षेत्रफल

$= \boxed{}$ वर्ग सेमी – $\boxed{}$ वर्ग सेमी

$= \boxed{}$ वर्ग सेमी

प्रश्नसंग्रह 7.3

1. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा वृत्त चाप का माप 54° हो तो उस चाप द्वारा सीमित द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π =3.14)

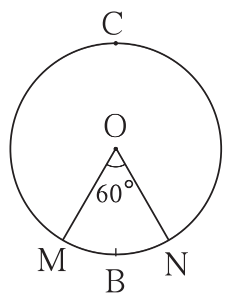
2. किसी वृत्तचाप का माप 80° और त्रिज्या 18 सेमी है तो उसके वृत्तचाप की लंबाई ज्ञात कीजिए । (π =3.14)

3. किसी द्वैत्रिज्य की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा उसके वृत्त चाप की लंबाई 2.2 सेमी हो तो द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

4. किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी तथा उसके लघु द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी हो तो उसके दीर्घ द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π =3.14)

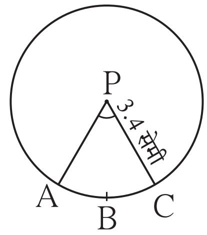
5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 30 वर्ग सेमी हो तो संगत वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

6. संलग्न आकृति में वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है और
m(चाप MBN)= 60°
तो (1) वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
(2) A(O – MBN) ज्ञात कीजिए ।
(3) A(O – MCN) ज्ञात कीजिए ।



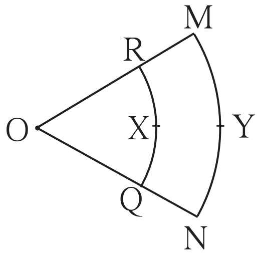
आकृति 7.31

7. 3.4 सेमी त्रिज्यावाले किसी द्वैत्रिज्य की परिमिति 12.8 सेमी है तो द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.32

8. संलग्न आकृति में बिंदु O यह द्वैत्रिज्य का केंद्र है । $\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, OR = 7 सेमी, OM = 21 सेमी हो तो चाप RXQ तथा चाप MYN की लंबाई ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

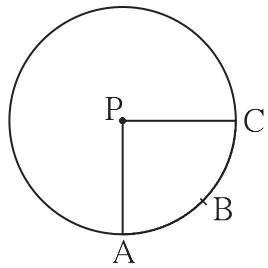


आकृति 7.33

9. संलग्न आकृति में A(P–ABC) = 154 वर्ग सेमी और वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी हो, तो

(1) $\angle$ APC का माप ज्ञात कीजिए ।

(2) चाप ABC की लंबाई ज्ञात कीजिए ।



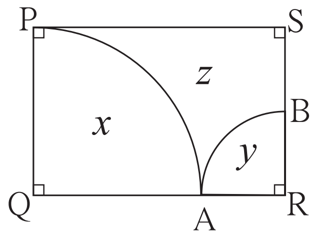
आकृति 7.34

10. किसी द्वैत्रिज्य की त्रिज्या 7 सेमी है । यदि द्वैत्रिज्य के चापों के माप निम्नलिखित हों तो उन द्वैत्रिज्यों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(1) 30° (2) 210° (3) 3 समकोण

11. लघु द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 3.85 वर्ग सेमी तथा उसके संगत केंद्रीय कोण का माप 36° हो तो उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

12. संलग्न आकृति 7.35 में □ PQRS एक आयत है । PQ = 14 सेमी, QR = 21 सेमी, हो तो आकृति में दर्शाएनुसार x, y और z इस प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



आकृति 7.35

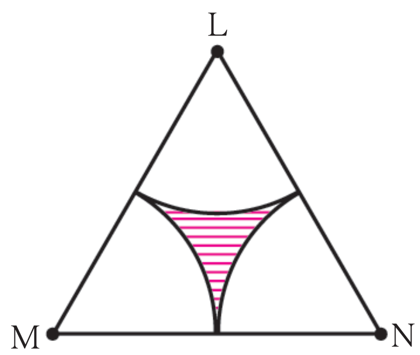
13. Δ LMN समबाहु त्रिभुज है । LM = 14 सेमी. त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष बिंदु को केंद्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर आकृति में दर्शाएनुसार तीन द्वैत्रिज्य खींचकर उसके आधार पर,

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) एक द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(3) तीनों द्वैत्रिज्यों का संपूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(4) रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

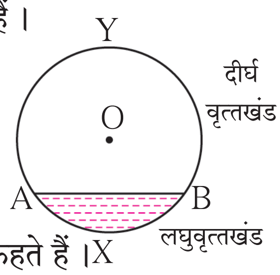


आकृति 7.36

आओ जानें

वृत्तखंड (Segment of a circle)

वृत्त की जीवा तथा संगत वृत्त चाप द्वारा सीमित किए गए भाग को वृत्तखंड कहते हैं ।



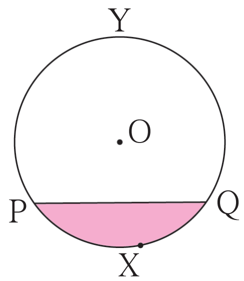
आकृति 7.37

लघु वृत्तखंड : जीवा तथा लघु वृत्तचाप के द्वारा सीमित किए हुए भाग को लघु वृत्तखंड कहते हैं । आकृति में वृत्तखंड AXB लघु वृत्तखंड है ।

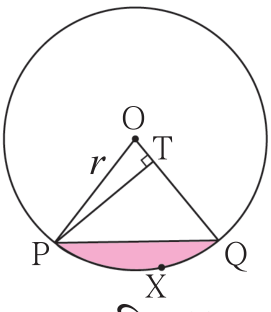
दीर्घ वृत्तखंड : जीवा तथा दीर्घ वृत्तचाप द्वारा सीमित किए हुए भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं । आकृति में वृत्तखंड AYB यह दीर्घ वृत्तखंड है ।

अर्ध वृत्तखंड : व्यास द्वारा बनने वाले वृत्तखंडों को अर्ध वृत्तखंड कहते हैं ।

वृत्तखंड का क्षेत्रफल (Area of a segment)



आकृति 7.38



आकृति 7.39

आकृति में PXQ लघु वृत्तखंड है तथा PYQ दीर्घ वृत्तखंड है ।

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ?

वृत्तकेंद्र O से OP तथा OQ दो त्रिज्याएँ खींचें । हम द्‌वैत्रिज्य O–PXQ का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं । इसी प्रकार Δ OPQ का क्षेत्रफल भी ज्ञात कर सकते हैं । द्‌वैत्रिज्य के क्षेत्रफल में से त्रिभुज का क्षेत्रफल घटाने पर वृत्तखंड का क्षेत्रफल प्राप्त होता है ।

वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल = द्‌वैत्रिज्य (O – PXQ) का क्षेत्रफल – Δ OPQ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ का क्षेत्रफल} \text{ ---------- (I)}$$

आकृति 7.39 Δ OPQ में, रेख PT यह भुजा OQ पर डाला गया लंब है,

समकोण Δ OTP में, $\sin\theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times \sin\theta$

PT = r $\sin\theta$ $\qquad\qquad$ ($\because$ OP = r)

Δ OPQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ×आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ---------------- (ii)

(I) तथा (II) से,

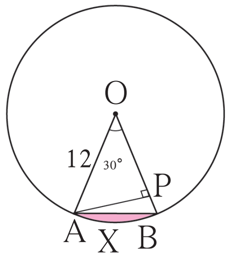
वृत्तखंड PXQ का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

(हमने न्यूनकोण के साइन अनुपात का अध्ययन किया है इसलिए ध्यान रखें कि θ का माप $90°$ या उससे कम होने पर ही इस सूत्र का उपयोग कर सकते हैं।)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) आकृति में $\angle AOB = 30°$, OA = 12 सेमी हो तो लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)



आकृति 7.40

विधि I :

$r = 12,\ \theta = 30°,\ \pi = 3.14$

द्वैत्रिज्य (O–AXB) का

क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

$= 37.68$ वर्ग सेमी

A(Δ OAB) = $\frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$ .....($\because \sin 30 = \frac{1}{2}$)

$= 36$ वर्ग सेमी

वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल = द्वैत्रिज्य (O - AXB) का क्षेत्रफल - A(Δ OAB)

= 37.68 - 36

= 1.68 वसेमी

विधि II :

$$\text{वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल} = r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

$$= 12^2\left[\frac{3.14\times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$$

$$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times 2}\right]$$

$$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$$

$$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$$

$$= \frac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$$

= 1.68 वसेमी

उदा. (2) P केंद्रवाले किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है । जीवा AB द्‌वारा वृत्त केंद्र पर समकोण बनाया गया हो तो लघु वृत्तखंड तथा दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

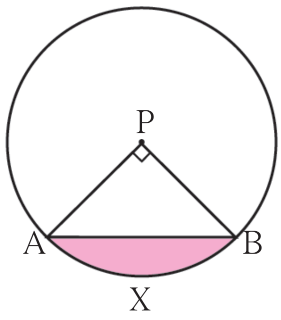
हल : r = 10 सेमी, θ = 90, π = 3.14

$$\text{द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 314$$

= 78.5 वसेमी



आकृति 7.41

$$A(\Delta APB) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

= 50 वसेमी

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल – त्रिभुज का क्षेत्रफल

= 78.5 - 50

= 28.5 वसेमी

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ वर्ग सेमी

उदा. (3) 14 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में समषट्भुज अंतर्लिखित किया गया है तो समषट्भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंत:भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

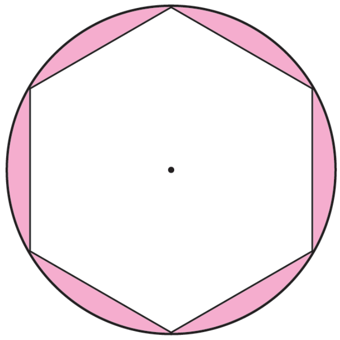
हल : समषट्भुज की भुजा = समषट्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या

$\therefore$ समषट्भुज की भुजा = 14 सेमी

समषट्भुज का क्षेत्रफल $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (भुजा)^2

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ वर्ग सेमी



आकृति 7.42

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ वसेमी

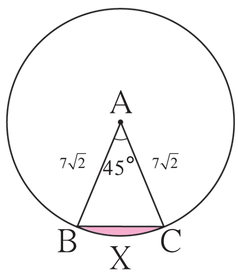
समषट्भुज के बाह्य तथा वृत्त के अंत:भाग का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – समषट्भुज का क्षेत्रफल

$= 616 - 509.208$

$= 106.792$ वसेमी

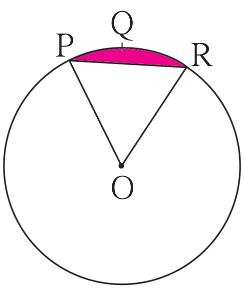
प्रश्नसंग्रह 7.4

1. आकृति 7.43 में बिंदु A केंद्रवाले वृत्त में $\angle ABC = 45°$, $AC = 7\sqrt{2}$ सेमी, हो तो वृत्तखंड BXC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



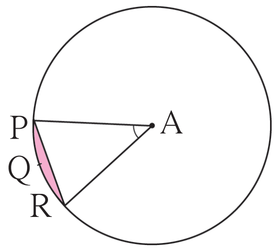
आकृति 7.43

2. आकृति 7.44 में बिंदु O वृत्त का केंद्र है। m(चाप PQR) = 60°, OP = 10 सेमी, हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)



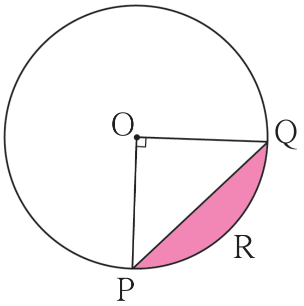
आकृति 7.44

3. संलग्न आकृति 7.45 में A केंद्र वाले वृत्त में $\angle$ PAR = 30° AP = 7.5 हो तो, वृत्तखंड PQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)



आकृति 7.45

4. आकृति 7.46 में O केंद्रवाले किसी वृत्त में PQ जीवा है । $\angle$ POQ = 90°, और छायांकित भाग का क्षेत्रफल 114 वसेमी हो तो वृत्त कि त्रिज्या ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)



आकृति 7.46

5. 15 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त में जीवा PQ वृत्त के केंद्र से 60° का कोण बनाती है । उस जीवा से बनने वाले दीर्घ वृत्तखंड और लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.73)

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. **नीचे दिए गए बहुवैकल्पिक प्रश्नों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।**

(1) किसी वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल का अनुपात 2:7 हो तो उस उस वृत्त की परिधि कितनी होगी ?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 सेमी लंबाईवाले किसी वृत्त चाप का माप 160° हो तो उस वृत्त की परिधि कितनी होगी ?

(A) 66 सेमी (B) 44 सेमी (C) 160 सेमी (D) 99 सेमी

(3) किसी चाप का माप 90° तथा त्रिज्या 7 सेमी हो तो द्‌वैत्रिज्य की परिमिति ज्ञात कीजिए ।

(A) 44 सेमी (B) 25 सेमी (C) 36 सेमी (D) 56 सेमी

(4) किसी शंकु के आधार की त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी हो तो शंकु का वक्रपृष्ठफल कितना होगा ?

(A) 440 सेमी^{2} (B) 550 सेमी^{2} (C) 330 सेमी^{2} (D) 110 सेमी^{2}

(5) 5 सेमी त्रिज्या वाले किसी लंबवृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल 440 सेमी^{2} हो तो उस लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई कितनी होगी ?

(A) $\frac{44}{\pi}$ सेमी (B) 22π सेमी (C) 14π सेमी (D) $\frac{22}{\pi}$ सेमी

(6) किसी शंकु को पिघलाकर उसके आधार की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या वाला लंबवृत्ताकार बेलन बनाया गया । यदि लंबवृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 5 सेमी हो तो शंकु की ऊँचाई कितनी होगी ?

(A) 15 सेमी (B) 10 सेमी (C) 18 सेमी (D) 5 सेमी

(7) 0.01 सेमी भुजावाले समघन का घनफल कितना घसेमी होगा?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) एक घन मीटर घनफल वाले समघन के भुजा की लंबाई कितनी होगी?

(A) 1 सेमी (B) 10 सेमी (C) 100 सेमी (D) 1000 सेमी

2. किसी शंकु छेद के आकारवाले कपड़े धोने के टब की ऊँचाई 45 सेमी है। टब के दोनों वृत्ताकार भाग की त्रिज्या क्रमश: 20 सेमी तथा 15 सेमी है। उस टब में पानी रखने की क्षमता कितनी होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. 1 सेमी त्रिज्यावाले प्लास्टिक की छोटी गोली पिघलाकर लंबवृत्ताकार बेलन के आकार की नली बनाई गई। नली की मोटाई 2 सेमी, ऊँचाई 90 सेमी तथा बाहरी त्रिज्या 30 सेमी हो तो नली बनवाने के लिए कितनी गोलियाँ पिघलानी पड़ेगी?

4. 16 सेमी लंबाई, 11 सेमी चौड़ाई, 10 सेमी ऊँचाईवाले किसी धातु के आयताकार बेलन (घनाभ) से धातु के 2 मिमी मोटे तथा 2 सेमी व्यासवाले कुछ सिक्के बनाने हों तो ऐसे कितने सिक्के बनेंगे ज्ञात कीजिए?

5. किसी मैदान को समतल करने के लिए 120 सेमी व्यास तथा 84 सेमी लंबाई वाले रोलर के 200 फेरे लगते हैं, तो 10 रु प्रतिवर्ग मीटर की दर से मैदान समतल करने में कितना खर्च लगेगा ?

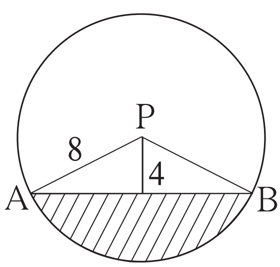
6. किसी धातु के खोखले गोले का व्यास 12 सेमी तथा उसकी मोटाई 0.01 मीटर हो तब उस खोखले गोले के बाहरी भाग का पृष्ठफल ज्ञात कीजिए तथा धातु का घनत्व 8.88 ग्राम प्रतिघनसेमी हो तो उस खोखले गोले का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

7. किसी वृत्ताकार बेलन के आकार वाली बाल्टी के आधार का व्यास 28 सेमी तथा ऊँचाई 20 सेमी है बाल्टी रेत से पूर्णत: भरी है उस बाल्टी की रेत को जमीन पर इसतरह पलटिए कि रेत का शंकु बने। रेत के शंकु की ऊँचाई 14 सेमी हो तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. 9 सेमी त्रिज्यावाले किसी धातु के ठोस गोले को पिघलाकर 4 मिमी व्यासवाला धातु का तार बनाया जाय तो उस तार की लंबाई कितने मीटर होगी ?

9. 6 सेमी त्रिज्यावाले किसी वृत्त के एक द्वैत्रिज्य का क्षेत्रफल 15π सेमी^{2} हो तो उस द्वैत्रिज्य के चाप का माप तथा वृत्त चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10.

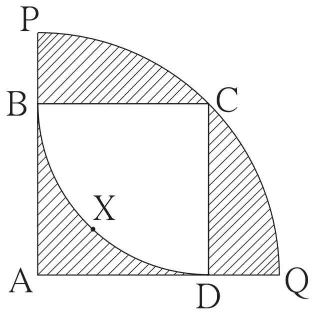


आकृति 7.47

संलग्न आकृति में वृत्त का केंद्र P और रेख AB वृत्त की जीवा है। PA = 8 सेमी और जीवा AB वृत्त के केंद्र से4 सेमी की दूरी पर हो तो रेखांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. द्वैत्रिज्य A–PCQ में $\square$ ABCD यह एक वर्ग है । द्वैत्रिज्य C – BXD की त्रिज्या 20 सेमी हो तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए ।



आकृति 7.48

हल : वर्ग ABCD की भुजा = द्वैत्रिज्य C – BXD की त्रिज्या = $\boxed{}$ सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $\boxed{}^2$ = $\boxed{}$ ..... (I)

वर्ग के छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – द्वैत्रिज्य C – BXD का क्षेत्रफल

$$= \boxed{} - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \boxed{} - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \boxed{} - 314$$

$$= \boxed{}$$

बड़े द्वैत्रिज्य की त्रिज्या = वर्ग ABCD के विकर्ण की लंबाई

$= 20\sqrt{2}$

बड़े द्वैत्रिज्य में वर्ग के बाहर के छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= द्वैत्रिज्य (A – PCQ) का क्षेत्रफल – वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

= A(A – PCQ) – A($\square$ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \boxed{}^2$$

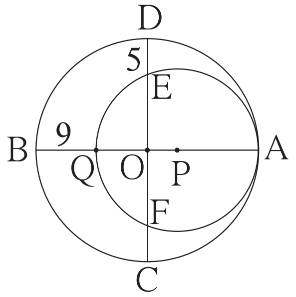
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\ (20\sqrt{2})^2 - (20)^2$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$\therefore$ छायांकित भाग का संपूर्ण क्षेत्रफल = 86 + 228 = 314 वसेमी

12.



आकृति 7.49

O और P केंद्रवाले वृत्त परस्पर बिंदु A पर अंत:स्पर्श करते हैं, यदि BQ = 9, DE = 5, हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करने के लिए नीचे दी गई कृति पूर्ण कीजिए।

हल : माना बड़े वृत्त की त्रिज्या = R

तथा छोटे वृत्त की त्रिज्या = r

OA, OB, OC और OD यह बड़े वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

OQ = OB $-$BQ = $\boxed{\quad}$

OE = OD $-$ DE = $\boxed{\quad}$

P केंद्रवाले वृत्त में दो जीवाओं के अंत: प्रतिच्छेदन के गुणधर्मानुसार

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\boxed{\quad} \times R = \boxed{\quad} \times \boxed{\quad}$ $(\because OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \boxed{\quad}$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

उत्तरसूची

प्रकरण 1 समरूपता

प्रश्नसंग्रह 1.1

1. $\frac{3}{4}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** 3 **4.** 1:1 **5.** (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (1) समद्विभाजक है। (2) समद्विभाजक नहीं है। (3) समद्विभाजक है।

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$ अर्थात रेखा NM || भुजा RQ **3.** QP = 3.5 **5.** BQ = 17.5

6. QP = 22.4 **7.** x = 6 ; AE = 18 **8.** LT = 4.8 **9.** x = 10

10. दत्त, XQ, PD, दत्त, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, समानुपात का मूलभूत प्रमेय, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

प्रश्नसंग्रह 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC कोको कसौटी **2.** Δ PQR ~ Δ LMN ; समरूपता की भुभुभु कसौटी के अनुसार

3. 12 मीटर **4.** AC = 10.5 **6.** OD = 4.5

प्रश्नसंग्रह 1.4

1. क्षेत्रफलों का अनुपात = 9 : 25 **2.** $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ **3.** $\boxed{A(\Delta\ PQR)}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 **5.** 20 सेमी **6.** $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45}$ – $\boxed{20}$; $\boxed{\text{25 वर्ग इकाई}}$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}, \frac{7}{20}, \frac{13}{20}$ **3.** 9 सेमी **4.** $\frac{3}{4}$ **5.** 11 सेमी **6.** $\frac{25}{81}$ **7.** 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ **9.** $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ **12.** $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{को–को}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{15}$

प्रकरण 2 पायथागोरस का प्रमेय

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. पायथागोरस का त्रिक ; (1), (3), (4), (6) **2.** NQ = 6 **3.** QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** $\boxed{\text{दत्त}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$

6. भुजा = $5\sqrt{2}$ सेमी, परिमिति = $20\sqrt{2}$ सेमी **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 सेमी

10. 8.2 मी.

प्रश्नसंग्रह 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 सेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).

2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) समकोण त्रिभुज होगा (3) 61 सेमी, (4) 15 सेमी, (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle$ PRQ.

3. RS = 6 सेमी, ST = $6\sqrt{3}$ सेमी **4.** 20 सेमी **5.** भुजा = 2 सेमी, परिमिति = 6 सेमी

6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ सेमी **10.** 7.5 किमी / घंटा **12.** 8 सेमी **14.** 8 सेमी

15. 192 वर्ग इकाई **17.** 58 **18.** 26

प्रकरण 3 वृत्त

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. (1) 90°, स्पर्शरेखा त्रिज्या प्रमेय (2) 6 सेमी ; कारण लंब दूरी (3) $6\sqrt{2}$ सेमी (4) 45°

2. (1) $5\sqrt{3}$ सेमी (2) 30° (3) 60° **4.** 9 सेमी

प्रश्नसंग्रह 3.2

1. 1.3 सेमी 2. 9.7 सेमी **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ सेमी

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. m(चाप DE) = 90°, m(चाप DEF) = 160°

प्रश्नसंग्रह 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°

3. m$\angle$R = 92°; m$\angle$N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

प्रश्नसंग्रह 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 या 6

3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.

2. (1) 9 सेमी (2) वृत्त के अंतःभाग में (3) 2 बिंदु, 12 सेमी

3. (1) 6 (2) $\angle$K = 30°; $\angle$M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 सेमी (2) 6.5 सेमी

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 **9.** $4\sqrt{3}$ सेमी

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) 65°, 130° (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 या 9 **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6 **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 **21.** 13

प्रकरण 4 भूमितीय रचनाएँ

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

1. (1) C (2) A (3) A

प्रकरण 5 निर्देशांक भूमिति

प्रश्नसंग्रह 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) एकरेखीय है। (2) एकरेखीय नहीं है। (3) एकरेखीय नहीं है। (4) एकरेखीय है।

3. (−1, 0) **7.** 7 या −5

प्रश्नसंग्रह 5.2

1. (1, 3) **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7 **4.** (−6, 3)

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18) **7.** (1) (1, 3) (2) (6, −2) (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. (−1, −7) **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** (0, 2) ; (−2, −3)

11. (−9, −8), (−4, −6), (1, −4) **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

प्रश्नसंग्रह 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) ढाल निश्चित नहीं हो सकता

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) ढाल निश्चित नहीं हो सकता

3. (1) एकरेखीय है। (2) एकरेखीय है। (3) एकरेखीय नहीं है। (4) एकरेखीय है।
(5) एकरेखीय है। (6) एकरेखीय है।

4. $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) एकरेखीय है। (2) एकरेखीय है। (3) एकरेखीय नहीं है। 3. (6, 13) 4. 3:1

5. $(-7, 0)$ 6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ **7.** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) हाँ, विषमबाहु त्रिभुज (2) नहीं (3) हाँ, समबाहु त्रिभुज 9. $k = 5$

13. 5, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$ **14.** (1, 3) **16.** $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, त्रिज्या = $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ **17.** (7, 3)

18. समांतर चतुर्भुज **19.** A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). **20.** (3, −2)

21. (7, 6) एवं (3, 6) **22.** 10 एवं 0

प्रकरण 6 त्रिकोणमिति

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ **2.** $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\text{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ **4.** $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\,\theta} = \frac{1}{2}$

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. गिरिजाघर की ऊँचाई 80 मीटर
2. जहाज की दीपस्तंभ से दूरी 51.60 मीटर
3. दूसरे इमारत की ऊँचाई $(10 + 12\sqrt{3})$ मीटर
4. तार द्वारा क्षितिज के समांतर सतह से बनाया गया कोण 30°
5. पेड़ की ऊँचाई $(40 + 20\sqrt{3})$ मीटर
6. पतंग के धागे की लंबाई 69.20 मीटर

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos\theta = \frac{60}{61}$ **3.** $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\text{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\text{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. इमारत की ऊँचाई $16\sqrt{3}$ मीटर

7. जहाज की दीपस्तंभ से दूरी $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ मीटर

8. इमारत की ऊँचाई $(12 + 15\sqrt{3})$ मीटर

9. सीढी का दूसरा सिरा जमीन से अधिक से अधिक 20.80 मीटर की ऊँचाई पर होगा ।

10. हवाई जहाज जमिन से अधिक से अधिक 1026 मीटर ऊँचाई पर था ।

प्रकरण 7 महत्वमापन

प्रश्नसंग्रह 7.1

1. 11.79 घसेमी **2.** 113.04 घसेमी **3.** 1413 वसेमी (π = 3.14 लेने पर) **4.** 616 वसेमी
5. 21 सेमी **6.** 12 जग **7.** 5 सेमी **8.** 273π वसेमी **9.** 20 गोलियाँ
10. 94.20 घसेमी, 103.62 वसेमी **11.** 5538.96 वसेमी, 38772.72 घसेमी
12. 1468.67π घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.2

1. 10.780 लीटर **2.** (1) 628 वसेमी (2) 1356.48 वसेमी (3) 1984.48 घसेमी

प्रश्नसंग्रह 7.3

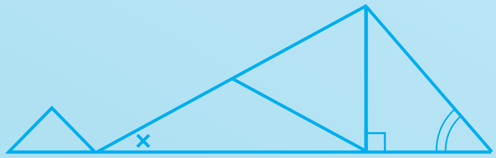
1. 47.1 वसेमी **2.** 25.12 सेमी **3.** 3.85 वसेमी **4.** 214 वसेमी **5.** 4 सेमी
6. (1) 154 वसेमी (2) 25.7 वसेमी (3) 128.3 वसेमी **7.** 10.2 वसेमी
8. 7.3 सेमी ; 22 सेमी **9.** (1) 90° (2) 22 सेमी
10.(1) 12.83 वसेमी (2) 89.83 वसेमी (3) 115.5 वसेमी **11.** 3.5 सेमी
12. x = 154 वसेमी ; y = 38.5 वसेमी ; z = 101.5 वसेमी
13. (1) 84.87 वसेमी (2) 25.67 वसेमी (3) 77.01 वसेमी (4) 7.86 वसेमी

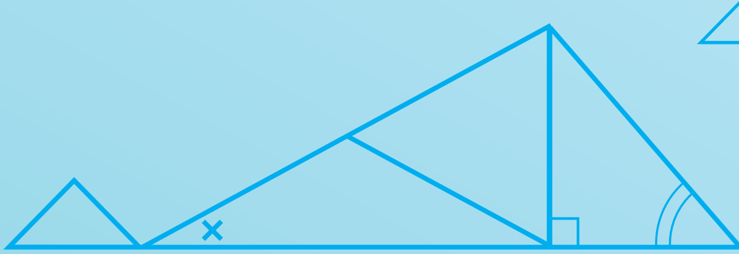
प्रश्नसंग्रह 7.4

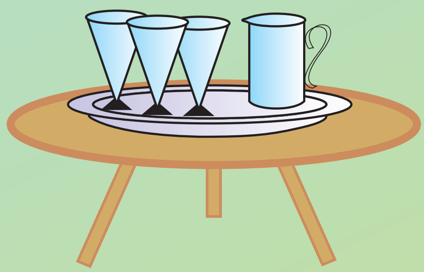
1. 3.72 वसेमी **2.** 9.08 वसेमी **3.** 0.65625 वइकाई **4.** 20 सेमी
5. 20.43 वसेमी ; 686.07 वसेमी

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 लीटर **3.** 7830 गोलियाँ **4.** 2800 सिक्के ($\pi = \frac{22}{7}$ लेकर) **5.** 6336 रुपये
6. 452.16 वसेमी ; 3385.94 ग्राम **7.** 2640 वसेमी **8.** 108 मीटर
9. 150°; 5π सेमी **10.** 39.28 वसेमी







महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे–४११००४.

हिंदी गणित इ. १० वी भाग–२ ₹ 77.00